

CHAPITRE 2

LIGNES ET CIRCUITS HYPERFRÉQUENCES

1^{er} Partie : Etude des lignes hyperfréquences

1	INTRODUCTION.....	2
2	LIGNES HYPERFRÉQUENCES.....	3
2.1	LIGNES BIFILAIRES.....	3
2.1.1	Equations caractéristiques, dites des télégraphistes.....	3
2.1.2	Résolution dans le cas des lignes sans pertes en régime sinusoïdal.....	4
2.1.3	Interprétation des résultats – onde progressive.....	6
2.1.4	Conclusion.....	9
2.2	LIGNES COAXIALES.....	9
2.2.1	Calcul des constantes réparties de la ligne.....	10
2.3	NOTION D'IMPÉDANCE CARACTÉRISTIQUE.....	12
2.3.1	Notion physique.....	12
2.3.2	Propriétés de Z_c	13
2.4	SYNTHESE – LE MODE T.E.M.....	13
2.4.1	Fil métallique de rayon r placé à une distance h d'un plan conducteur.....	14
2.4.2	Ligne bifilaire.....	14
2.4.3	Ligne à rubans parallèles.....	14
2.4.4	Ligne coaxiale.....	14
2.4.5	Ligne à rubans parallèles disymétriques (Microstrip).....	14
2.4.6	Ligne triplaqué.....	15
2.4.7	Schéma des modèles utilisés.....	15
2.4.8	Unités.....	15
2.5	LES GUIDES D'ONDE.....	16
2.5.1	L'onde en espace libre.....	16
2.5.2	Condition de propagation guidée par un plan métallique.....	17
2.5.3	Propagation de deux ondes planes faisant un angle α avec un plan yoz	17
2.5.4	Définition d'un guide d'onde – Le mode TE_{10}	20
2.5.5	Répartition des champs magnétiques dans un guide d'onde.....	21
2.5.6	Etude mathématique sommaire du mode TE_{10}	22
2.5.7	Ligne de transmission équivalente à un guide.....	28
2.5.8	Etude sommaire de divers modes de propagation guidée.....	29
2.5.9	Résumé des caractéristiques des guides d'onde.....	33
2.6	TERMINAISONS DES LIGNES ET GUIDES.....	34
2.6.1	Mise en équation.....	34
2.6.2	Coefficients caractéristiques de l'onde stationnaire.....	36
2.6.3	Transformation des impédances le long d'une ligne.....	38
2.7	MATRICE DE TRANSFERT D'UNE LIGNE.....	40
2.7.1	Cas général.....	40
2.7.2	Application aux lignes de courte longueur.....	41

1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre seront examinés les principaux éléments véhiculant et aiguillant le signal perçu par le radar avant son traitement proprement dit, que sont les lignes et circuits hyperfréquences.

Les bandes de fréquences dans lesquelles fonctionnent les radars sont normalisées, les deux tables de normalisation : « IEEE Standard » et « NATO System » sont présentés simultanément dans le tableau de synthèse suivant :

Types d'ondes	Fréquences MHz	Dénomination IEEE Standard (λ moyen)	Dénomination NATO System (λ moyen)	Radars types
Décamétriques	3/30	HF (20 m)		Radars Transhorizon
Métriques	30/300	VHF (2 m)	A (2,4 m)	Radars spéciaux
Décimétriques	300/3000	UHF ou P (50 cm) L (25 cm) S (10 cm)	B (80 cm) C (40 cm) D (25 cm) E (20 cm) F (8,5 cm)	Radars de veille de grande portée
Centimétriques	3000/30000	C (5 cm) X (3 cm) Ka (2 cm) K (13 mm)	F (8,5 cm) G (6 cm) H (4 cm) I (3,3 cm) J (2 cm) K (10 mm)	Radars de trajectographie Conduites de tir Radars d'atterrissage Radars aéroportés
Millimétriques	30000 à 110000	Ku (9 mm) V (5 mm) W (3 mm)	K (10 mm) L (6 mm) M (3,7 mm)	Radars de cartographie Autodirecteurs Altimètres Fusées de proximité...

Les éléments hyperfréquences peuvent se classer en deux grandes catégories :

- les lignes hyperfréquences servant à guider les signaux et dans lesquelles apparaissent les phénomènes liés à la propagation du signal,
- les circuits hyperfréquences effectuant sur ce signal des opérations localisées (adaptation, filtrage, couplage...).

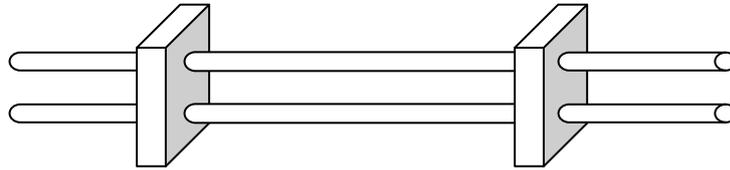
Le but de ce chapitre est de donner, sans reprendre toute la théorie des hyperfréquences, des notions sur le comportement de ces lignes et circuits et quelques critères d'utilisation.

2 LIGNES HYPERFRÉQUENCES

2.1 LIGNES BIFILAIRES

2.1.1 Equations caractéristiques, dites des télégraphistes

Considérons une ligne formée de deux conducteurs identiques séparés par un milieu diélectrique, comme par exemple la ligne à air ci-dessous :



Lorsque cette ligne est parcourue par des courants de très haute fréquence, outre la résistance propre des éléments de la ligne, rentrent en ligne de compte :

- la conductance du milieu qui les sépare,
- la capacité entre les deux fils de la ligne,
- la self-inductance de chacun de ces fils,

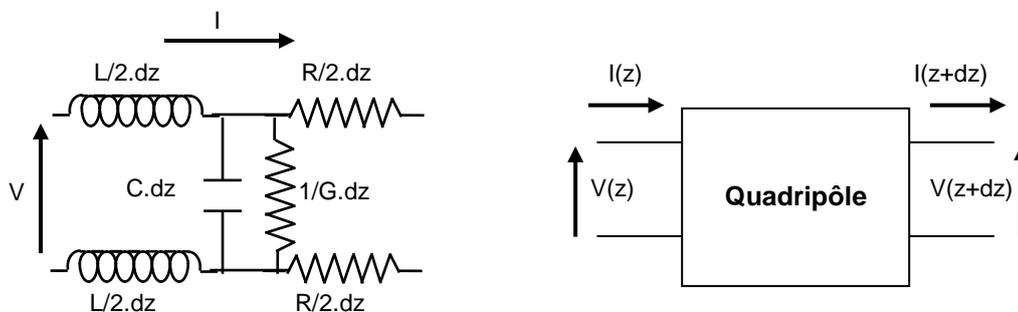
qui en basse fréquence ont une contribution négligeable.

Ces éléments ne sont pas localisés comme dans les circuits classiques, mais répartis le long de la ligne.

Nous définirons donc, dans le cas d'une ligne homogène et pour l'ensemble des deux conducteurs :

- R : résistance par unité de longueur,
- G : conductance par unité de longueur,
- L : self par unité de longueur,
- C : capacité par unité de longueur.

Dans ces conditions, une longueur très petite dz de ligne *bifilaire* a pour **schéma équivalent** :



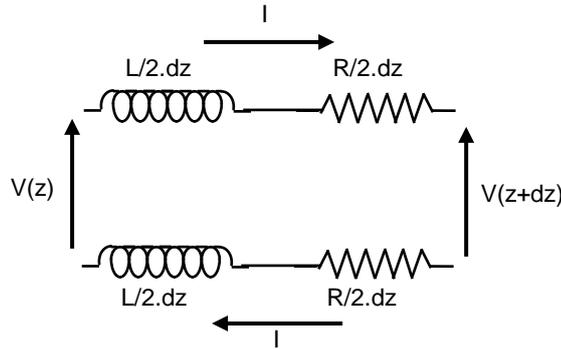
La ligne peut donc être ramenée à une suite de quadripôles élémentaires symétriques. Qu'elle soit infinie, ou qu'elle soit fermée sur un dipôle, ses deux branches sont parcourues par des courants égaux et de signe contraire.

Nous allons appliquer au quadripôle élémentaire les lois de *Kirchhoff* en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur. C'est-à-dire l'influence des courants de fuite dans les éléments parallèles, dans l'équation des tensions ; et l'influence des différences de potentiel

dans les branches, dans l'équation des courants.

On aboutit ainsi aux schémas équivalents simplifiés et aux équations suivantes :

Équation des tensions



$$V(z + dz) - V(z) = - \left(R I \cdot dz + L \cdot dz \cdot \frac{dI}{dt} \right)$$

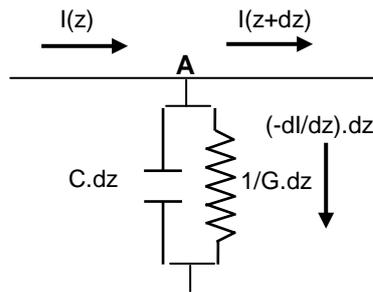
soit en posant :

$$V(z + dz) = V(z) + \frac{dV}{dz} \cdot dz$$

$$\boxed{\frac{dV}{dz} = - \left(R I + L \frac{dI}{dt} \right)}$$

Équation des courants

Les signes des courants sont choisis en écrivant l'équation du nœud A. Il vient :



$$\frac{dI}{dz} = - \left(G \cdot V + C \cdot \frac{dV}{dt} \right)$$

2.1.2 Résolution dans le cas des lignes sans pertes en régime sinusoïdal

Nous nous placerons dans le cas des lignes formées par deux conducteurs parfaits ($R = 0$) séparés par un diélectrique parfait ($G = 0$).

Il vient alors :

$$\frac{\delta V}{\delta z} = - \frac{L \cdot \delta I}{\delta t} \quad \ll 1 \gg$$

$$\frac{\delta I}{\delta z} = - \frac{C \cdot \delta V}{\delta t} \quad \ll 2 \gg$$

en dérivant « 1 » par rapport à z et « 2 » par rapport à t , il vient :

$$\frac{\delta^2 V}{\delta z^2} = -L \frac{\delta^2 I}{\delta z \cdot \delta t} \quad \ll 3 \gg$$

$$\frac{\delta^2 I}{\delta z \cdot \delta t} = -\frac{C \cdot \delta^2 V}{\delta t^2} \quad \ll 4 \gg$$

soit :

$$\boxed{\frac{\delta^2 V}{\delta z^2} = LC \frac{\delta^2 V}{\delta t^2}}$$

et de même :

$$\boxed{\frac{\delta^2 I}{\delta z^2} = LC \frac{\delta^2 I}{\delta t^2}}$$

Dans le cas où les courants et tensions sont des fonctions sinusoïdales du temps, on peut écrire en attachant à V et I les variables imaginaires v et i :

$$v = e^{j\omega t} \cdot \varphi(z)$$

$$i = e^{j\omega t} \cdot \psi(z)$$

avec :

- ω positif par hypothèse ;
- $V = \text{Réel}(v)$;
- $I = \text{Réel}(i)$;

on a alors :

$$\frac{\delta^2 v}{\delta t^2} = -\omega^2 \cdot v \quad \frac{\delta^2 i}{\delta t^2} = -\omega^2 \cdot i$$

et les équations deviennent :

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 i}{\delta z^2} + LC \cdot \omega^2 \cdot i &= 0 & \frac{\delta^2 i}{\delta t^2} + \omega^2 \cdot i &= 0 \\ \frac{\delta^2 v}{\delta z^2} + LC \cdot \omega^2 \cdot v &= 0 & \frac{\delta^2 v}{\delta t^2} + \omega^2 \cdot v &= 0 \end{aligned}$$

L'identité de forme des équations différentielles amène à poser :

$$\varphi(z) = A \cdot e^{j\beta z} + B \cdot e^{-j\beta z} \quad \psi(z) = D \cdot e^{j\beta z} + E \cdot e^{-j\beta z}$$

avec :

$$\beta = \sqrt{LC \cdot \omega^2} = \omega \sqrt{LC}$$

En effet, dans ces conditions :

$$\frac{\delta \varphi}{\delta z} = j \cdot \beta \cdot A \cdot e^{j\beta z} - j \cdot \beta \cdot B \cdot e^{-j\beta z} \quad \frac{\delta^2 \varphi}{\delta z^2} = -\beta^2 \left(A \cdot e^{j\beta z} + B \cdot e^{-j\beta z} \right)$$

La solution générale des équations aux courants et tensions sera alors :

$$v = A \cdot e^{j(\omega t + \beta z)} + B \cdot e^{j(\omega t - \beta z)} \quad i = D \cdot e^{j(\omega t + \beta z)} + E \cdot e^{j(\omega t - \beta z)}$$

A, B, D et E sont liées aux conditions initiales qui peuvent être imposées, soit en courant, soit en tension.

Nous choisirons : $B = V_o^+$ et $A = V_o^-$, on écrit donc :

$$v = V_o^+ \cdot e^{j(\omega t + \beta z)} + V_o^- \cdot e^{j(\omega t - \beta z)}$$

$$\frac{\delta v}{\delta z} = -j \cdot \beta \cdot V_o^+ \cdot e^{j(\omega t + \beta z)} + j \cdot \beta \cdot V_o^- \cdot e^{j(\omega t - \beta z)}$$

et comme :

$$\frac{\delta v}{\delta z} = -L \cdot \frac{\delta i}{\delta t} = -j \cdot L \cdot \omega \cdot i$$

il vient :

$$\frac{\delta v}{\delta z} = -j \cdot L \cdot \omega \left(D \cdot e^{j(\omega t - \beta z)} + E \cdot e^{j(\omega t + \beta z)} \right)$$

d'où en remarquant que $\beta = \omega \sqrt{LC}$:

$$E = V_o^+ \cdot \frac{\beta}{L\omega} = V_o^+ \cdot \sqrt{\frac{C}{L}}$$

$$D = -V_o^- \cdot \sqrt{\frac{C}{L}}$$

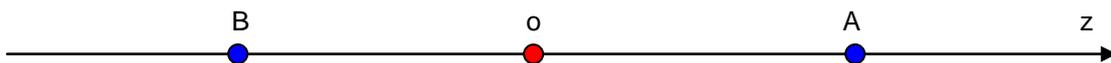
on aura donc :

$$v = V_o^+ \cdot e^{j(\omega t - \beta z)} + V_o^- \cdot e^{j(\omega t + \beta z)}$$

$$i = \sqrt{\frac{C}{L}} \left(V_o^+ \cdot e^{j(\omega t - \beta z)} - V_o^- \cdot e^{j(\omega t + \beta z)} \right)$$

2.1.3 Interprétation des résultats – onde progressive

Les équations générales précédentes font apparaître des fonctions du temps et de la distance sous une forme symétrique, d'où la notion de progression des tensions et courants le long de la ligne. Nous allons examiner ce point en partant de considérations physiques.



Considérons un phénomène vibratoire, tension v par exemple, de pulsation ω engendré en un point O et qui se déplace à la vitesse W sur un axe OZ .

En O l'équation du phénomène peut s'écrire en utilisant les notations imaginaires :

$$v = V_o \cdot e^{j\omega t}$$

Si W est positif, en un point A distant d'une longueur z du point O , ce même phénomène se produira avec un retard $\tau = z/W$, dû au temps de propagation le long de OA , soit à chaque instant :

$$v_A^+ = V_o^+ \cdot e^{j\omega(t-\tau)} = V_o^+ \cdot e^{j\omega \left(t - \frac{z_A}{W} \right)}$$

dans le cas d'une vitesse négative, on aura $\tau = z_B / W$ (retard si z_B négatif) et :

$$v_B^- = V_o^- \cdot e^{j\omega(t-\tau)} = V_o^- \cdot e^{j\omega \left(t - \frac{z_B}{W} \right)}$$

En rapprochant ces résultats des équations du paragraphe 2.1.1, nous voyons que v et i se décomposent en deux phénomènes vibratoires.

L'un noté + dans les équations, se propageant dans le sens des z positifs à la vitesse :

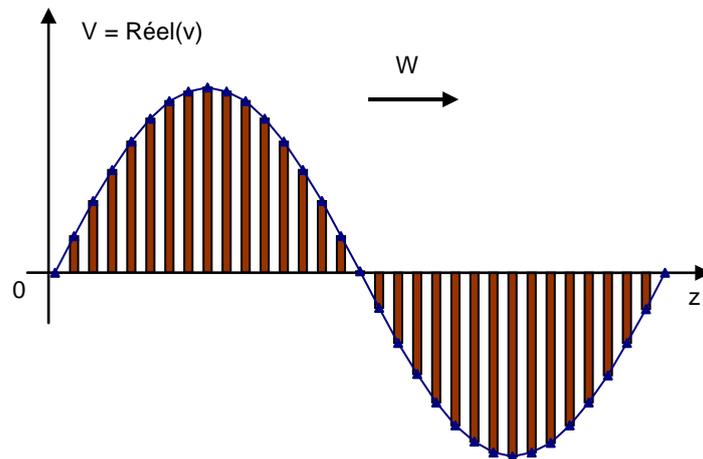
$$W^+ = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

L'autre noté - dans les équations, se propageant dans le sens des z négatifs à la vitesse :

$$W^- = \frac{-\omega}{\beta} = \frac{-1}{\sqrt{LC}}$$

β est de ce fait appelée **constante de propagation** de l'onde.

On peut représenter la tension le long d'une ligne à un instant t comme sur le schéma suivant :



Lorsque t varie, l'ensemble de la figure se déplace à la vitesse W le long de l'axe OZ .

Il existe plusieurs valeurs de z , pour lesquelles les phénomènes sont exactement les mêmes, la variation de V le long de z étant une fonction périodique de z à t donné.

La période spatiale Δz de v répond à la condition que, quel que soit t :

$$e^{j\omega \left(t - \frac{z}{W} \right)} = e^{j\omega \left(t - \frac{z + \Delta z}{W} \right)}$$

La solution est donc :

$$\frac{\omega \Delta z}{W} = 2k\pi$$

La plus petite valeur de ΔZ satisfaisant cette condition est appelée longueur d'onde λ (pour $k = 1$).
La longueur d'onde λ répond à la relation :

$$\lambda = \frac{2\pi W}{\omega}$$

soit :

$$\lambda = \frac{W}{f}$$

- W : vitesse de déplacement de l'onde,
- f : fréquence du signal.

Or, nous savons que :

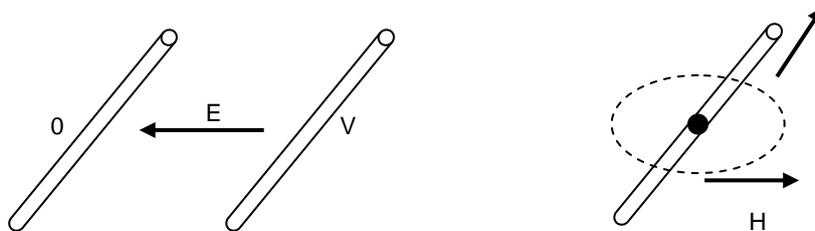
$$W = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{\omega}{\beta}$$

d'où :

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

On peut noter, en outre, que :

- à la différence de potentiel V entre les deux fils de la ligne est lié un champ électrique : $E = -dV/dx$ qui se déplace avec elle ;
- au courant I qui circule dans chaque fil est lié un champ magnétique H tel que $\int_c \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I$ et qui est contenu dans un plan perpendiculaire à I .

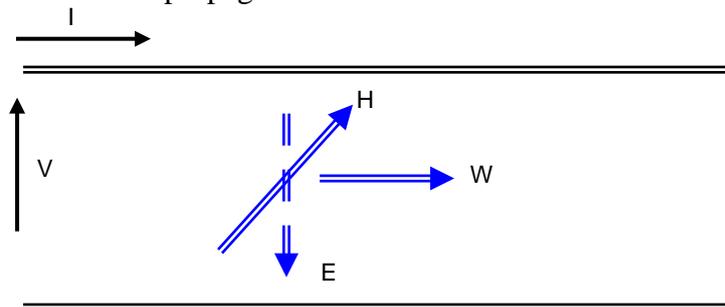


E et H sont comme I et V des variables sinusoïdales de z et de t .

Les champs E et H forment une onde électromagnétique qui se propage à la même vitesse et dans le même sens que les courants et tensions sur la ligne.

Les figures des champs sont individuellement liées aux figures des tensions et courants et donc se déplacent avec elles.

On peut remarquer en outre, que sur l'axe de symétrie de la ligne, E et H sont perpendiculaires entre eux et que le sens de la propagation se fait dans la direction $\vec{E} \wedge \vec{H}$.



2.1.4 Conclusion

Lorsqu'on excite une ligne bifilaire par une tension sinusoïdale V , un courant sinusoïdal I prend naissance. A ces tensions et courants est associée une onde électromagnétique qui se propage dans le diélectrique, séparant les deux conducteurs en étant guidée par eux.

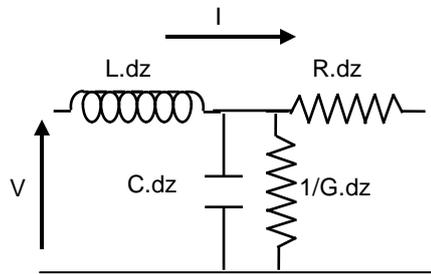
Cette onde se déplace à la même vitesse que les tensions et courants, les deux phénomènes étant indissociables et constituant la conductibilité de la ligne en hyperfréquences.

2.2 LIGNES COAXIALES

Les lignes coaxiales sont constituées d'un conducteur central et d'un conducteur extérieur, séparés par un milieu diélectrique.

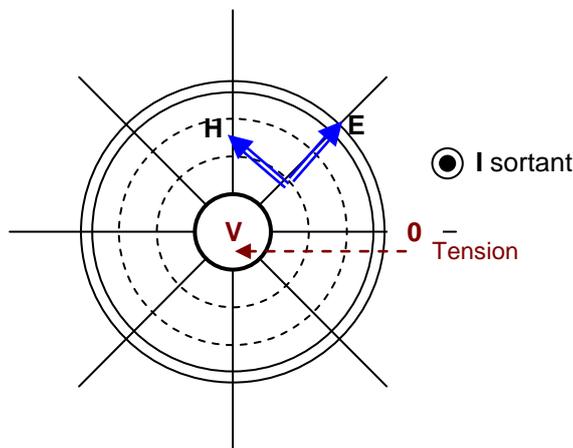


On peut considérer que la partie active de la ligne est le conducteur central et que le conducteur extérieur se comporte comme un court-circuit. Le schéma équivalent d'une ligne coaxiale est donc le suivant :



On vérifie aisément que les équations des tensions et courants sont les mêmes que dans le cas des lignes bifilaires. Les équations de propagation des tensions et courants, ainsi que les propriétés générales de l'onde électromagnétique, restent vraies dans le cas des lignes coaxiales.

Par ailleurs, la répartition des champs E et H à l'intérieur d'une ligne coaxiale est la suivante :



Le champ E est radial et le champ H tangent à des circonférences concentriques aux conducteurs du coaxial.

On remarque que \vec{E} et \vec{H} sont constamment perpendiculaires et que la propagation de l'onde a toujours lieu dans le sens $\vec{E} \wedge \vec{H}$. Nous pouvons, dans ce cas particulier, préciser certains paramètres attachés à l'onde accompagnant V et I .

2.2.1 Calcul des constantes réparties de la ligne

a Capacité linéique

On démontre que le flux de l'induction électrique à travers une surface fermée, est égal à la somme des charges intérieures à cette surface : Q .

Soient ϵ la constante diélectrique du milieu et E le champ électrique. Nous aurons, sur un cylindre de rayon r et de longueur unitaire interne au coaxial :

$$Q = \epsilon \cdot E \cdot 2\pi r$$

d'où :

$$E = \frac{Q}{2\pi \cdot r \cdot \epsilon} = -\frac{dv}{dr}$$

et, entre l'âme du coaxial de rayon R_1 et son enveloppe de rayon R_2 :

$$V = \int_{R_2}^{R_1} \frac{dv}{dr} dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{2\pi\epsilon} \frac{dr}{r} = \frac{Q}{2\pi\epsilon} \text{Log}(R_2/R_1)$$

d'où l'on tire :

$$C = \frac{Q}{V}$$

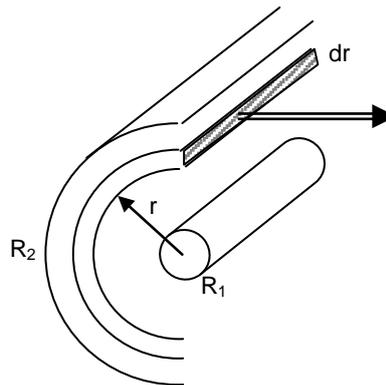
$$E = \frac{Q}{2\pi r \epsilon}$$

soit :

$C = \frac{2\pi \epsilon}{\text{Log}(R_2/R_1)}$ $E = \frac{V}{r \text{Log}(R_2/R_1)}$

b Self linéique

Nous partons de la définition : $L = \Phi/I$, avec Φ : flux magnétique ; I : courant inducteur. Considérons un élément, de longueur unitaire, du câble coaxial, si μ est la perméabilité magnétique du milieu :



$$H = \frac{I}{2\pi r}, \quad d\phi = \mu \cdot H \cdot dr$$

$$\phi = \frac{\mu \cdot I}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu \cdot I}{2\pi} \text{Log}(R_2/R_1)$$

d'où la valeur de L.

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \text{Log}(R_2/R_1)$$

c Interprétation des résultats

Les expressions de E et H montrent que E est en phase avec v, et H en phase avec i. Comme v et i sont en phase, E et H **sont des variables sinusoïdales en phase**.

L'équation des ondes du paragraphe 2.1.1 montre que dans le cas d'une onde se propageant dans le sens des z positifs (*cas choisi dans les applications précédentes*) :

$$\frac{v}{i} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Ecrivons l'expression de E/H :

$$\frac{E}{H} = \frac{V}{r \text{Log}(R_2/R_1)} \cdot \frac{2\pi r}{I} = \frac{2\pi}{\text{Log}(R_2/R_1)} \cdot \frac{V}{I} = \frac{2\pi}{\text{Log}(R_2/R_1)} \cdot \sqrt{L/C}$$

$$= \frac{2\pi}{\text{Log}(R_2/R_1)} \cdot \sqrt{\frac{\mu}{2\pi} \cdot \text{Log}(R_2/R_1) \cdot \frac{\text{Log}(R_2/R_1)}{2\pi \epsilon}}$$

$$\frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

De même que v et i sont liés entre eux par les caractéristiques électriques de la ligne, E et H sont liés entre eux par les constantes diélectriques et de perméabilité magnétique du milieu séparant les deux conducteurs et dans lequel se propage l'onde.

Ecrivons la vitesse de propagation des tensions et courants dans ce cas particulier. Nous avons vu au paragraphe 2.1.2 que :

$$W = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

dans notre cas, il vient :

$$LC = \frac{\mu}{2\pi} \text{Log}(R_2/R_1) \cdot \frac{2\pi \epsilon}{\text{Log}(R_2/R_1)} = \mu \epsilon$$

ce qui permet d'écrire :

$$W = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$$

Cette double égalité montre que la vitesse de déplacement de l'onde, qui est la même que celle des tensions et courants, ne dépend que de μ et ϵ .

De même que la vitesse de déplacement des tensions et courants ne dépend que de L et C, celle de l'onde ne dépend que de μ et ϵ . Dans le cas présent, elles sont égales.

La puissance instantanée transmise par le coaxial est donnée (v et i étant en phase) par l'expression :

$$P_i = v \cdot i$$

Ceci amène à former le produit :

$$\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \vec{H}$$

soit, en valeur algébrique :

$$\Pi = E \cdot H = \frac{v}{r \text{Log}(R_2/R_1)} \cdot \frac{i}{2\pi r} = \frac{v \cdot i}{2\pi \text{Log}(R_2/R_1)} \cdot \frac{1}{r^2}$$

il a, comme dimension, une densité de puissance, par unité de surface.

Intégrons le nombre Π sur la surface d'onde constituée par la section diélectrique du coaxial :

$$P = \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \Pi \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$$

$$P = \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{v \cdot i}{2\pi \text{Log}(R_2/R_1)} \cdot \frac{dr \cdot d\theta}{r}$$

$$P = v \cdot i = P_i$$

La puissance transmise par le coaxial est égale au flux à travers la section diélectrique du coaxial du vecteur :

$$\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \vec{H} \text{ est le VECTEUR DE POYNTING de l'onde.}$$

Ainsi donc, les caractéristiques de propagation le long d'une ligne coaxiale peuvent être indifféremment attachées aux courants et tensions qui y prennent naissance, ou à l'onde radioélectrique qu'elle transporte. Cette dualité est le caractère principal des signaux hyperfréquences.

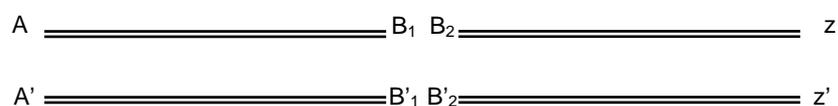
2.3 NOTION D'IMPÉDANCE CARACTÉRISTIQUE

2.3.1 Notion physique

Dans tout ce qui précède, nous avons considéré un élément de longueur dz d'une ligne infinie. La ligne étant supposée homogène, nous retrouverons, à des instants différents, les mêmes valeurs des courants et tensions.

Il existe donc un paramètre invariant dans une ligne infinie, que nous allons tenter de faire apparaître par des considérations physiques.

Considérons une ligne infinie A z ; A' z' coupée en B B' :



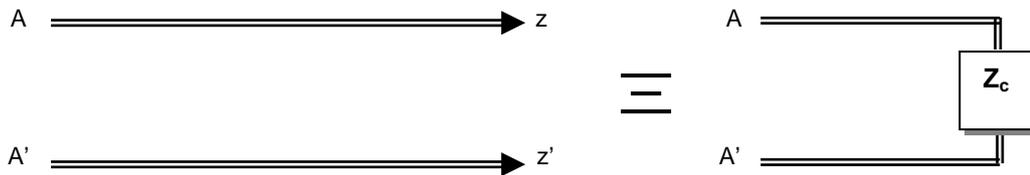
Vue de l'extérieur, cette ligne présente en A A' une impédance d'entrée Z.

Lorsque l'on supprime le tronçon $A B_1, A' B'_1$, on se retrouve en $B_2 B'_2$ à l'entrée d'une ligne de longueur infinie de même impédance d'entrée Z que la précédente.

Cet invariant de la ligne de longueur infinie est appelé *impédance caractéristique Z_c de la ligne*.

L'impédance caractéristique peut ainsi être définie en tous points de la ligne.

Par ailleurs, on peut remplacer le tronçon $B_2 z, B'_2 z'$ de la ligne par une impédance de valeur égale à Z_c sans rien changer aux courants et tensions dans le tronçon $A B_1, A' B'_1$. On déduira de cette propriété que, quelle que soit la coupure choisie, Z_c est égal à v/i courant et tension au point B de la ligne infinie.



2.3.2 Propriétés de Z_c

L'impédance d'entrée d'une ligne infinie ou bouclée sur son impédance caractéristique est égale à Z_c . Une ligne bouclée sur son impédance caractéristique se comporte comme une ligne infinie.

Dans le cas de l'exemple choisi, tension et courant se propageant dans le sens des z positifs :

$$Z_c = \frac{v^+}{i^+} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Ce qui se généralise en :

$$Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{v^+}{i^+} = -\frac{v^-}{i^-}$$

dans le cas des lignes sans pertes.

Par ailleurs, si W est la vitesse de déplacement de l'onde, on peut aussi écrire :

$$W = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{CW} = W \cdot L$$

2.4 SYNTHÈSE – LE MODE T.E.M

Nous venons de voir dans les paragraphes 2.1 et 2.2, deux types de lignes de transmissions dans lesquelles un signal hyperfréquence pouvait se propager. Cette propagation présente deux aspects :

- déplacement de courants et tensions sinusoïdaux de pulsation ω à une vitesse W ;
- propagation simultanée d'une onde progressive caractérisée par un champ électrique E et un champ magnétique H , perpendiculaires à la direction de propagation de l'onde et perpendiculaires entre eux.

Le mode de propagation, ainsi défini, est connu sous le nom de mode TRANSVERSE ÉLECTRO MAGNÉTIQUE, ou mode T.E.M.

Diverses lignes peuvent être sujettes à ce mode de propagation. Elles sont complètement déterminées par leur impédance caractéristique Z_c et la vitesse de propagation de l'onde W (ou la constante de propagation $\beta = \omega / W$). Nous allons décrire les plus utilisées :

2.4.1 Fil métallique de rayon r placé à une distance h d'un plan conducteur

Ce plan conducteur peut, dans la pratique, être le sol. Si $h \gg r$:

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \cdot \text{Log}(2h/r) \quad C = \frac{2\pi \cdot \varepsilon}{\text{Log}(2h/r)}$$

$$Z_c = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \text{Log}(2h/r) \quad W = \frac{1}{\sqrt{\mu \cdot \varepsilon}}$$

Si h faible, remplacer $\frac{2h}{r}$ par $\frac{h}{r} + \sqrt{\frac{h^2}{r^2} - 1}$

2.4.2 Ligne bifilaire

Ligne composée de deux fils de rayon r espacés de la distance d :

$$L = \frac{\mu}{\pi} \cdot \text{Log}(d/r) \quad C = \frac{\pi \cdot \varepsilon}{\text{Log}(d/r)}$$

$$Z_c = \frac{1}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \text{Log}(d/r) \quad W = \frac{1}{\sqrt{\mu \cdot \varepsilon}}$$

2.4.3 Ligne à rubans parallèles

Elle est composée de deux plaques conductrices planes de largeur b séparées d'une distance a par un milieu diélectrique :

$$L = \mu \frac{a}{b} \quad C = \varepsilon \frac{b}{a}$$

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \frac{a}{b} \quad W = \frac{1}{\sqrt{\mu \cdot \varepsilon}}$$

2.4.4 Ligne coaxiale

C'est le type de ligne vu au paragraphe 2.2 :

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \cdot \text{Log}(R_2/R_1) \quad C = \frac{2\pi \cdot \varepsilon}{\text{Log}(R_2/R_1)}$$

$$Z_c = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \text{Log}(R_2/R_1) \quad W = \frac{1}{\sqrt{\mu \cdot \varepsilon}}$$

2.4.5 Ligne à rubans parallèles disymétriques (Microstrip)

Elle se compose d'un ruban métallique de largeur b parallèle à une plaque métallique, séparés par un diélectrique d'épaisseur a .

Ses caractéristiques peuvent être déterminées par les formules empiriques suivantes :

$$Z_c \cong \frac{200}{\sqrt{\epsilon'}} \log_{10} \left(1 + \frac{4a}{b} \right) \text{ et : } W = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{\epsilon'}} \left(\frac{1 + 10 \cdot a/b}{1 + 6 \cdot a/b} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Le ruban peut être obtenu par photogravure, ce qui permet un dimensionnement facile et l'introduction de constantes localisées.

2.4.6 Ligne triplaque

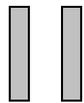
Elle se compose d'une bande conductrice de largeur b et d'épaisseur e , maintenue à égale distance de deux plans conducteurs de largeur L , espacés de la distance h . Les deux plans conducteurs peuvent être reliés entre eux si $L \gg h$, sans changer les caractéristiques de la ligne.

On peut les déterminer en toute première approximation par les relations pratiques suivantes :

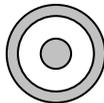
$$Z_c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon'}} \left[50 - 75 \log_{10} \left(\frac{b}{10h} \right) \right] \left(1,2 - \frac{e}{h} \right)^2 \text{ et : } W \cong \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{\epsilon'}}$$

valables à 10 % près pour $0,1 < b/h < 2$ et $0 < e/h < 0,25$.

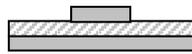
2.4.7 Schéma des modèles utilisés



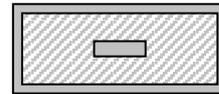
Rubans parallèles



Ligne coaxiale

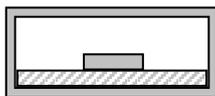


Ligne microstrip

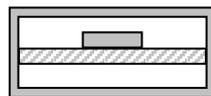


Ligne triplaque

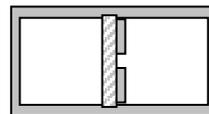
Le développement de la microélectronique a donné naissance à un grand nombre d'autres réalisations, parmi lesquelles :



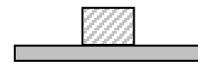
Boitier microstrip



Ligne suspendue



Fin line



Guide diélectrique

2.4.8 Unités

Dans le vide ou l'air :

$$W = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s ; } \epsilon_o = \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \text{ F/m ; } \mu_o = 4\pi 10^{-7} \text{ H/m ; } \sqrt{\frac{\mu_o}{\epsilon_o}} = 120\pi \text{ ohm}$$

pour les diélectriques habituels, on définit :

$$\epsilon' = \frac{\epsilon}{\epsilon_o} = 1 \text{ à } 5 ; \mu' = \frac{\mu}{\mu_o} \cong 1$$

d'où :

$$W = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{\epsilon'}} \text{ et : } \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon'}}$$

2.5 LES GUIDES D'ONDE

2.5.1 L'onde en espace libre

L'étude de lignes de transmission a montré que la propagation du signal hyperfréquence (*tension et courant*) est liée à la propagation d'une onde électromagnétique caractérisée par la présence d'un champ électrique \vec{E} et d'un champ magnétique \vec{H} tous deux variables sinusoïdales du temps et, intimement liés l'un à l'autre, de même que les courants et tensions sont intimement liés dans la ligne.

En particulier, l'étude de cette onde, dans le cas du **câble coaxial**, a montré que :

- \vec{E} et \vec{H} sont des variables sinusoïdales, de même pulsation ω et variant en phase dans le temps ;
- \vec{E} et \vec{H} sont perpendiculaires entre eux et la propagation de l'onde se fait dans le sens :

$$\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \vec{H}$$

- le rapport \vec{E}/\vec{H} est constant et ne dépend que de la constante diélectrique du milieu ϵ et de sa perméabilité magnétique μ :

$$\frac{\vec{E}}{\vec{H}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \eta \quad (120\pi \text{ dans le vide})$$

- la vitesse de propagation de l'onde est :

$$W = \frac{1}{\sqrt{\mu \cdot \epsilon}}$$

- le produit $\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \vec{H}$ représente la densité de puissance instantanée par unité de surface portée par l'onde ;
- l'onde est caractérisée par sa période spatiale $\lambda = W/f$ si f est la fréquence du signal émis.

Ces propriétés se conservent quelles que soient les dimensions de la section droite du câble coaxial. En particulier, si R_1 et $R_2 \rightarrow \infty$, les caractéristiques précédentes (qui ne dépendent ni de R_1 ni de R_2) restent vraies.

On peut donc imaginer un cas limite de propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu homogène ; dans ce cas, nous admettons (aucun élément ne venant influencer sur \vec{E} ou \vec{H}) que cette onde se propage en ligne droite.

Une telle onde existe, elle est connue sous le nom **d'onde plane ou onde en espace libre**. Pour lui donner naissance, il suffit de produire en un point de l'espace le vecteur champ électrique \vec{E} ou le vecteur champ magnétique \vec{H} , la présence de l'un entraînant automatiquement celle de l'autre.

Suivant les conditions initiales produites, l'onde pourra être :

- à POLARISATION RECTILIGNE : lorsque \vec{E} et \vec{H} restent pendant la propagation, parallèles à des directions fixes (et perpendiculaires entre elles) de l'espace ;
- à POLARISATION ELLIPTIQUE : lorsque \vec{E} et \vec{H} , tout en restant perpendiculaires entre eux, changent de direction le long de l'axe de propagation, de telle manière que l'extrémité de chaque vecteur \vec{E} ou \vec{H} décrive une hélice sur la surface extérieure d'un cylindre elliptique (hélice de pas égal à λ , période spatiale de l'onde).

Dans ce qui suit, nous nous intéresserons à des ondes à polarisation rectiligne.

2.5.2 Condition de propagation guidée par un plan métallique

Lorsque nous avons étudié le câble coaxial sans pertes, il est apparu une répartition des champs \vec{E} et \vec{H} telle que :

$$\vec{E} = \frac{-dv}{dx}$$

soit perpendiculaire aux conducteurs formant la surface limite du coaxial, et \vec{H} perpendiculaire à \vec{E} tangentiel à ces mêmes conducteurs.

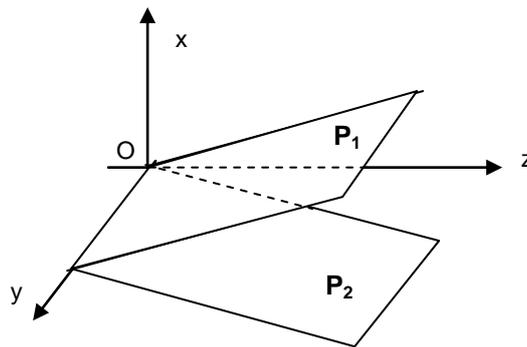
Cette répartition correspond bien à une perte nulle, car elle ne fait apparaître aucune différence de potentiel le long d'une ligne de courant. C'est cette dernière condition que nous retiendrons :

- Pour que la propagation d'une onde aux environs d'un plan métallique se fasse sans échange d'énergie, donc, sans pertes, il faut et il suffit que les conditions aux limites à la surface du conducteur ne fassent pas apparaître de différence de potentiel le long d'une ligne de courant.
- Comme $V = \int \vec{E} \cdot d\vec{x}$ cela entraîne l'une des conditions suivantes :
 - le champ \vec{E} est perpendiculaire au plan métallique en chaque point de ce dernier,
 - le champ \vec{E} est nul en chaque point du plan métallique.

En d'autres termes, si l'on veut guider, sans pertes d'énergie, une onde par un plan métallique, il faudra placer celui-ci perpendiculairement au champ \vec{E} ou en un lieu où \vec{E} est nul.

2.5.3 Propagation de deux ondes planes faisant un angle α avec un plan yoZ

La propagation des deux ondes se fait dans les plans P_1 et P_2 parallèlement au plan xOz , de sorte qu'à un instant donné, la situation est la même dans tout plan parallèle à xOz . Nous pouvons donc étudier la propagation dans le seul plan xOz .



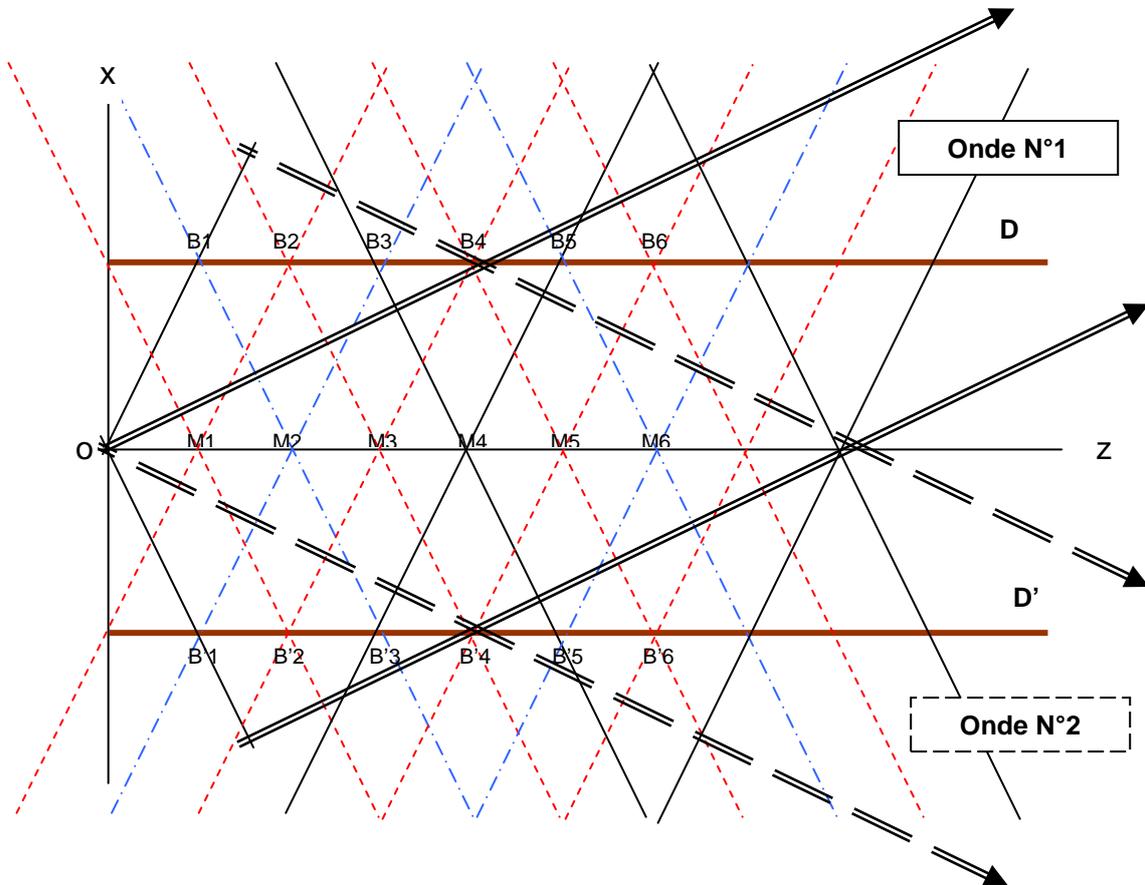
Soient oP_1 et OP_2 les deux directions de propagation. A un instant donné t_0 les champs \vec{E} et \vec{H} portés par les deux ondes sont maxima en O ; supposons, en outre, que :

- \vec{E} est perpendiculaire au plan xOz ,
- \vec{H} est, par conséquent, dans le plan xOz ,
- la polarisation des deux ondes est rectiligne.

Les deux ondes ainsi définies se déplacent à la vitesse W dans les directions oP_1 et oP_2 de telle manière qu'à tout instant les champs électriques et magnétiques de chacune d'elles soient respectivement invariants dans des plans perpendiculaires à oP_1 et oP_2 ou plans équiphases.

Sur la figure suivante sont représentés à l'instant t_0 :

- en traits pleins, les tracés des plans où E et H sont maxima positifs,
- en traits mixtes, les tracés des plans où E et H sont nuls,
- en traits pointillés, les tracés des plans où E et H sont maxima négatifs.



Les deux ondes vont se composer de telle manière qu'en chaque point, les champs soient la somme vectorielle :

$$\vec{H}_R = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$$

$$\vec{E}_R = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

Les champs E ayant été choisis parallèles, la sommation pour eux sera algébrique.

L'onde composite ainsi formée est susceptible d'être guidée par tout plan, parallèle à XOZ puisque \vec{E}_R est perpendiculaire à XOZ.

Elle peut également être guidée par des surfaces métalliques autres que ces plans, à condition que ce soient des lieux où \vec{E}_R est nul.

Nous allons donc chercher dans XOZ les lieux, s'ils existent, où \vec{E}_R est nul.

Cette condition est réalisée à l'instant t_0 aux points :

- M_1 ; M_2 ; M_3 de l'axe OZ ;
- B_2 ; B_4 ; B_6 sur la droite D ;
- B'_2 ; B'_4 ; B'_6 sur la droite D' ;

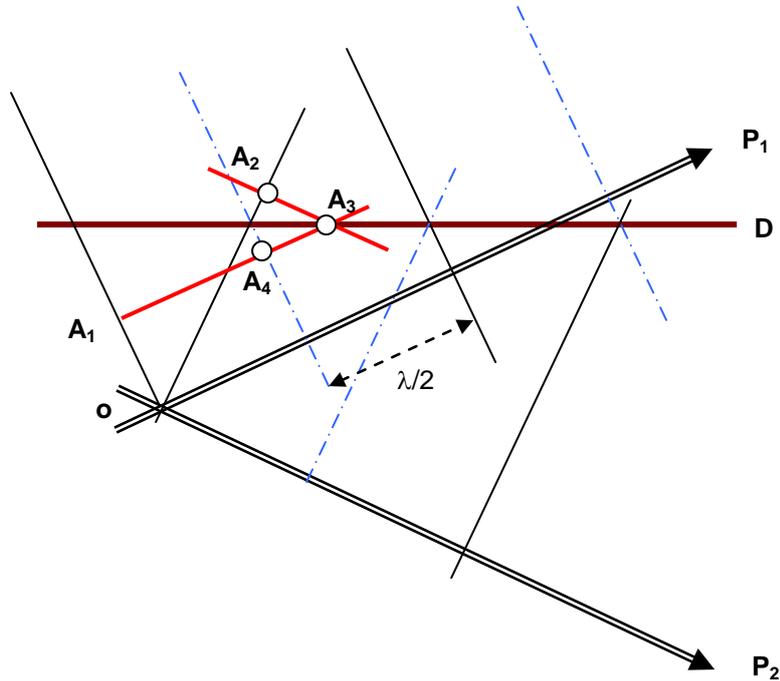
pour lesquels \vec{E}_1 et \vec{E}_2 sont nuls ensemble.

Elle est également réalisée en des points :

- B1 ; B3 ; B5 sur la droite D ;
- B'1 ; B'2 ; B'5 sur la droite D' ;

pour lesquels E_1 et E_2 sont maxima et opposés.

Les droites D et D' sont des droites pour lesquelles la condition $E_T = 0$ semble être réalisée de manières différentes, nous allons tenter de généraliser cette propriété pour tout point de la droite D.



A l'instant t_0 , la répartition des champs est celle représentée ci-dessus. Dans la direction OP_1 la distance séparant un plan où E_1 est maximum positif d'un plan où E_1 est maximum négatif, est égale à $\lambda / 2$. Il en est de même pour E_2 dans la direction OP_2 .

D'un point A_3 quelconque de la droite, abaissons deux perpendiculaires aux plans équiphases passant par O.

Les deux segments $[A_1, A_3]$ et $[A_2, A_3]$ ainsi tracés sont respectivement parallèles à OP_1 et OP_2 .

On peut vérifier que :

$$A_1A_3 = A_1A_4 + A_4A_3 = \lambda/2 + A_4A_3$$

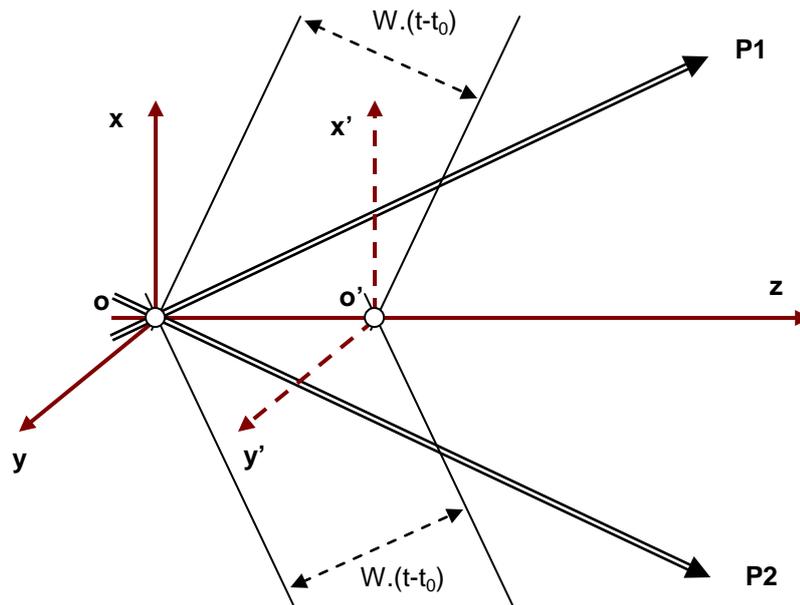
$$A_4A_3 = A_2A_3$$

$$A_1A_3 - A_2A_3 = \lambda/2$$

A l'instant t_0 , tout point de la droite D est tel que la différence de parcours des ondes 1 et 2, à partir des plans équiphases passant par O, est de $\lambda/2$. Les deux ondes sont donc en opposition de phase en tout point de la droite D, la droite D est, par voie de conséquence, un lieu des points où le champ électrique E_R est nul.

Il faut maintenant généraliser à tout instant cette propriété :

À l'instant t, les deux ondes se sont déplacées de la quantité $W.(t - t_0)$, la première dans la direction OP_1 , la seconde dans la direction OP_2 . Les plans équiphases qui se coupaient initialement sur Oy se coupent maintenant sur $O'y'$.



Les déplacements étant symétriques par rapport à YOZ, le nouvel axe de coupe sera dans le plan YOZ. Tout se passe donc comme si l'ensemble de la figure au temps t_0 avait subi une translation le long de OZ.

CONCLUSIONS

Lorsque deux ondes planes, dont les directions font entre elles un angle 2α interfèrent l'une avec l'autre, il existe une infinité de plans tels que D, où le champ électrique E_R est nul.

- Ces plans sont parallèles au plan de symétrie de la propagation, et équidistants entre eux, nous désignerons par « a » la distance qui les sépare.
- Par ces plans, on peut faire passer des surfaces métalliques sans rien changer à la propagation des ondes.
- En sélectionnant deux quelconques des plans D et deux plans perpendiculaires (parallèles à XOZ), on peut ainsi former un conduit à l'intérieur duquel le régime d'onde précédent sera reconstitué.
- Le régime d'onde ainsi formé est un régime d'onde guidée et le conduit ainsi formé un guide d'onde.

2.5.4 Définition d'un guide d'onde – Le mode TE_{10}

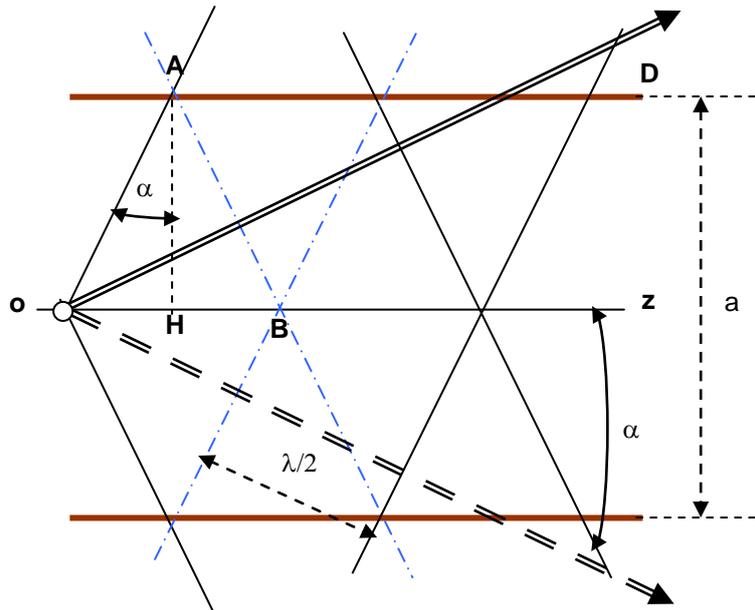
L'onde guidée définie dans l'exemple précédent est caractérisée par le fait que le champ électrique est toujours perpendiculaire à la direction de propagation, elle est connue sous le nom **d'onde Transverse Électrique ou onde TE**.

Le cas le plus simple est celui correspondant au choix de deux plans D les plus rapprochés possibles, le mode correspondant est connu sous le nom de mode TE_{10} .

La nature de l'onde dépend des dimensions du guide car « a » distance séparant les deux plans D, λ , longueur d'onde des deux ondes élémentaires et α sont liés par une relation que nous allons établir :

Soit D est un plan où E_R est nul. En se reportant à la figure page suivante :

$$oB = \lambda / 2 \cdot \frac{1}{\cos \alpha} = 2 oH ; oH = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha$$



d'où :

$$a \operatorname{tg} \alpha = \lambda / 2 \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$\lambda = 2 a \sin \alpha$$

Si on fixe a , à chaque valeur de λ correspond un seul angle α répondant aux conditions de guidage de l'onde : champ E_R nul sur les plans D et D' .

Il existe une valeur limite de λ au-delà de laquelle les conditions de propagation ne peuvent être réalisées, car $\sin \alpha \leq 1$, soit :

$$\lambda \leq \lambda_c = 2a$$

En pratique, on choisit généralement (guides normalisés) :

$$\lambda \cong a \sqrt{2}$$

Il n'y a pas de limite théorique à la distance séparant les deux autres plans formant le guide d'onde.

Notons simplement que l'on choisit cette distance : b , plus faible que a , sinon ce serait b qui viendrait limiter les conditions de propagation.

2.5.5 Répartition des champs magnétiques dans un guide d'onde

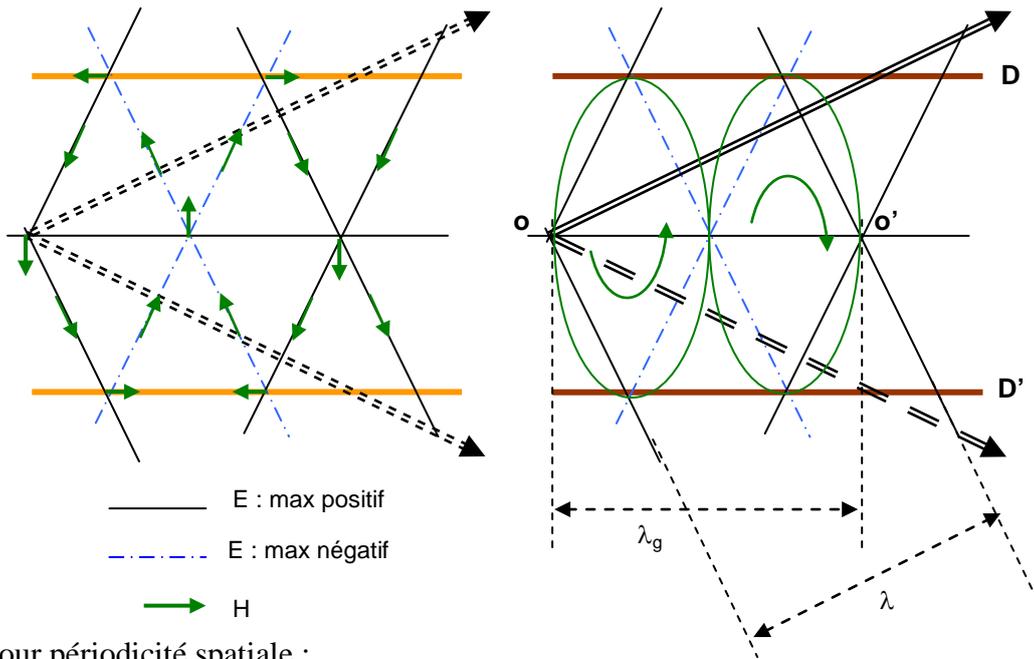
Nous savons que pour chacune des ondes élémentaires, E et H sont en phase et le produit vectoriel : $\vec{E} \wedge \vec{H}$ donne la direction de propagation.

Nous pouvons donc, en chacun des plans équiphases des ondes élémentaires, tracer la valeur de H_1 et H_2 et en déduire la valeur de $H_R = H_1 + H_2$.

La figure de champ ainsi formée présente les particularités suivantes :

- H_R est perpendiculaire à l'axe OZ .
- H_R est tangentiel aux plans D et D' .
- La figure de champ est périodique, et se renouvelle cycliquement au temps t_0 à chaque passage des plans équiphases de champ E maximum positif.

La construction de la figure de champ magnétique est présentée ci- après :



Elle a pour périodicité spatiale :

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\cos \alpha}$$

Nous avons vu au paragraphe 2.5.3 que, dans le temps, l'ensemble de la figure se déplace parallèlement à OZ. En particulier, pendant la période 1/f des ondes élémentaires, chaque plan d'onde se déplace de λ dans la direction OP_1 et OP_2 . L'ensemble de la figure se déplace donc dans le sens OZ de la quantité $OO' = \lambda_g$.

On peut donc en déduire qu'il existe un régime d'onde progressive suivant OZ de période spatiale λ_g égale au déplacement de la figure d'onde pendant la période du signal.

λ_g est donné par la relation :

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\cos \alpha} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (\lambda/2a)^2}}$$

2.5.6 Etude mathématique sommaire du mode TE_{10}

a Répartition du champ E_R

Les champs électriques issus des deux ondes élémentaires sont colinéaires, leur somme se réduit à la relation algébrique :

$$E_R = E_1 + E_2$$

Plaçons-nous dans le plan xOZ. Les deux ondes élémentaires sont des ondes progressives, on peut donc écrire en chaque point M du plan :

- pour l'onde n° 1 :

$$E_1 = E e^{j(\omega t - \beta.p_1)}$$

- pour l'onde n° 2 :

$$E_2 = E e^{j(\omega t - \beta.p_2)}$$

On retrouve ici la longueur d'onde de coupure pour $\lambda / 2a = 1$:

$$\lambda_c = 2a$$

Et on peut vérifier que :

$$\beta \cdot \sin \alpha = (2\pi/\lambda) \cdot (\lambda/2a) = \pi/a$$

on écrira finalement :

$$E = E_o \cdot \cos \frac{\pi x}{a} \cdot \exp\{j(\omega t - 2\pi / \lambda_g \cdot Z)\}$$

b Impédance d'onde Z_{TE}

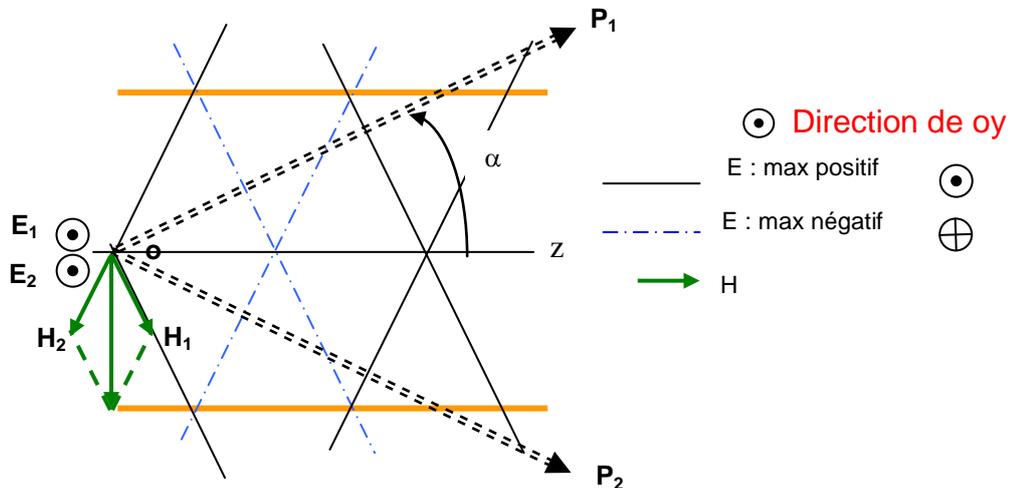
En espace libre, on a défini l'impédance d'onde par la relation :

$$\eta = \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

Dans le guide d'onde, nous définirons également une impédance d'onde

$$Z_{TE} = \frac{E_{\text{Transverse}}}{H_{\text{Transverse}}}$$

Où E_T et H_T sont projections de E_R et H_R sur le plan xoy . Au point « o » :



- E_1 et E_2 sont colinéaires et parallèles à oy , donc :

$$E_T = E_R = E_1 + E_2$$

- H_1 et H_2 font entre eux un angle 2α , donc :

$$H_T = \cos \alpha (H_1 + H_2)$$

$$Z_{TE} = \frac{E_1 + E_2}{H_1 + H_2} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{E}{H} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{\eta}{\cos \alpha}$$

$$Z_{TE10} = \eta \cdot \frac{\lambda_g}{\lambda} = \eta \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - (\lambda/2a)^2}}$$

ce qui est généralisable en chaque point.

c Puissance transmise par un guide en mode TE_{10}

La puissance instantanée transmise par l'onde dans la direction OZ, est définie par le vecteur de POYNTING, d'amplitude égale à la densité de puissance de l'onde par unité de surface :

$$\vec{\Pi} = \vec{E}_T \wedge \vec{H}_T$$

et d'après b :

$$H_T = \frac{E_T}{Z_{TE}}$$

$$\Pi = \frac{E_T^2}{Z_{TE}}$$

E_T étant une variable sinusoïdale du temps, la densité de puissance moyenne correspondante sera :

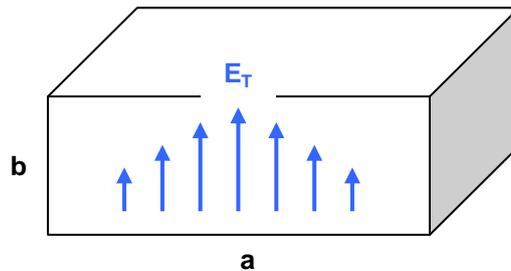
$$\Pi_m = \frac{|E_T|^2}{2 \cdot Z_{TE}}$$

avec :

$$|E_T| = E_o \cdot \cos \frac{\pi x}{a}$$

Intégrons cette densité dans la section droite du guide, il vient :

$$P_m = \int_0^a \int_0^b \Pi_m \cdot dx \cdot dy$$



$$P_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{E_o^2}{Z_{TE}} \int_0^b dy \cdot \int_0^a \cos^2 \left(\frac{\pi x}{a} \right) \cdot dx$$

$$P_m = \frac{1}{4} \cdot \frac{E_o^2}{Z_{TE}} \cdot a \cdot b$$

Dans l'air :

$$\eta = 120\pi = 377\Omega ; Z_{TE} = 377 \cdot \frac{\lambda_g}{\lambda}$$

$$P_m \cong 6,66 \cdot 10^{-4} \cdot E_o^2 \cdot a \cdot b \cdot \frac{\lambda}{\lambda_g}$$

Formule à prendre en unité cohérente, par exemple : λ , λ_g , a et b en cm et E_o en volt/cm

E_o peut atteindre, sans risques de claquage 10 000 V/cm à la pression atmosphérique au niveau du sol (7 000 V/cm à 6 000 m).

d Vitesse de groupe et vitesse de phase

La **vitesse de phase** est la vitesse à laquelle il faut se déplacer pour voir les **figures d'onde** invariantes (*soit voir l'onde sous la même phase*).

Pour toute onde progressive d'équation :

$$E = E_0 \cdot e^{i(\omega t - \beta z)} \cdot F(xy)$$

la phase de l'onde est :

$$\varphi = \omega t - \beta z$$

et :

$$\varphi = c^{te} \text{ si : } \omega \cdot \Delta t = \beta \cdot \Delta z$$

soit :

$$\boxed{\frac{\omega}{\beta} = \frac{\Delta z}{\Delta t} = v_{\varphi}}$$

On retrouve ainsi : v_{φ} **ou vitesse de déplacement des figures d'ondes** :

- pour l'onde en espace libre :

$$v_{\varphi} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} = W$$

- dans le guide :

$$\beta_g = \beta \cdot \cos \alpha$$

$$v_{\varphi} = \frac{W}{\cos \alpha} = \frac{W \cdot \lambda_g}{\lambda}$$

L'onde en espace libre se déplaçant de λ pendant une période du signal, on retrouve bien ici que la figure d'onde guidée se déplace de λ_g pendant une période du signal.

Par contre, il apparaît ici que $v_{\varphi} \geq W$, ce qui donne une vitesse de propagation dans le guide supérieure à la vitesse de la lumière (W dans l'air ou le vide) ; ceci ne semble pas logique, la vitesse de la lumière étant considérée comme vitesse limite de transmission d'une énergie.

Il faut donc reprendre le problème et déterminer une vitesse de propagation de l'énergie ou de l'information portée par une onde.

Pour faire transporter de l'information par une onde, on est amené à la moduler. De ce fait, on crée un spectre de fréquence caractérisé par des composantes (*de fréquences différentes*) d'amplitude et de phases relatives, caractéristiques du signal émis.

Un observateur qui se déplacera à la vitesse du signal verra, à chaque instant, les diverses composantes de celui-ci sous la même phase relative. Soient *deux raies quelconques* de pulsation ω_1 et ω_2 , β_1 et β_2 les constantes de phase du milieu aux pulsations ω_1 et ω_2 , les variations de phases enregistrées par l'observateur seront :

$$\Delta\varphi_1 = \omega_1 \cdot \Delta t - \beta_1 \cdot \Delta z$$

$$\Delta\varphi_2 = \omega_2 \cdot \Delta t - \beta_2 \cdot \Delta z$$

et il faut :

$$\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2$$

soit :

$$\frac{\Delta Z}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\beta_2 - \beta_1}$$

soit, à la limite, si :

$$\omega_2 - \omega_1 \ll \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} \text{ et } \beta_2 - \beta_1 \ll \frac{\beta_2 + \beta_1}{2}$$

la vitesse de déplacement du signal ou **vitesse de groupe** est :

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta}$$

soit :

- pour l'onde en espace libre :

$$\beta = \omega \cdot \sqrt{\mu \epsilon}$$

$$d\beta = d\omega \cdot \sqrt{\mu \epsilon}$$

$$v_g = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} = W$$

- pour l'onde guidée :

$$\beta_g = \beta \cdot \cos \alpha = \omega \cdot \sqrt{\mu \epsilon} \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}$$

et comme :

$$\lambda = \frac{W}{f} = \frac{2\pi}{\omega \cdot \sqrt{\mu \epsilon}}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{a \cdot \omega \cdot \sqrt{\mu \epsilon}}\right)^2}$$

on peut donc écrire :

$$\beta_g^2 = \omega^2 \cdot \mu \epsilon \left(1 - \frac{\pi^2}{a^2 \cdot \omega^2 \cdot \mu \epsilon}\right) = \omega^2 \mu \epsilon - \frac{\pi^2}{a^2}$$

$$2\beta_g \cdot d\beta_g = 2 \cdot \mu \epsilon \cdot \omega \cdot d\omega$$

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta_g} = \frac{\beta_g}{\omega \cdot \mu \epsilon} = \frac{\omega \cdot \sqrt{\mu \epsilon} \cdot \cos \alpha}{\omega \cdot \mu \epsilon}$$

$$v_g = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{\mu \epsilon}} = W \cdot \cos \alpha = W \cdot \frac{\lambda}{\lambda_g}$$

La vitesse de propagation de l'énergie dans un guide V_g est donc inférieure à W .

On peut donc interpréter ce résultat de la manière suivante :

La propagation dans le guide est celle de deux ondes élémentaires faisant un angle 2α entre elles. La vitesse de propagation de l'énergie, sur chacune d'elles est W , et l'on peut considérer que l'énergie attachée à chaque onde suit un chemin à réflexions multiples. Sa vitesse de propagation sur OZ est alors : $V_g = W \cdot \cos \alpha$.

2.5.7 Ligne de transmission équivalente à un guide

Nous avons vu qu'une ligne était entièrement caractérisée, si l'on donnait :

- sa constante de propagation β ,
- son impédance caractéristique Z_c ,
- sa puissance transmise : $P_m = V^2/2 \cdot Z_c$.

On pourra donc remplacer un guide par une ligne de transmission en lui imposant :

- une constante de propagation égale à β_g ,
- une puissance transmise $P_m = (E_0^2/4 \cdot Z_{TE}) \cdot a \cdot b$

La difficulté est de définir une impédance caractéristique du guide au même sens que pour une ligne, soit :

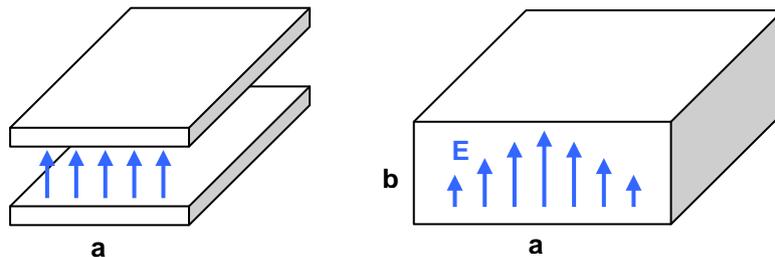
$$Z_c = \frac{V}{I}$$

car dans un guide, on ne peut définir de tensions et courants comme dans une ligne. La notion d'impédance caractéristique d'un guide est donc imprécise.

Dans le cas de la ligne à rubans parallèles (§ 2.4.3) nous avons défini :

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot \frac{b}{a} = \eta \frac{b}{a}$$

expression dans laquelle η est l'impédance d'onde.



Par analogie pour un guide d'onde en mode TE_{10} , compte tenu de la figure de champs, nous écrivons :

$$Z_{c_{10}} = Z_{TE_{10}} \cdot \frac{b}{a}$$

et calculerons la puissance transmise :

$$P_m = \frac{1}{4} \frac{E_0^2}{Z_{TE}} a \cdot b = \frac{V^2}{2Z_c}$$

ce qui conduit à :

$$V^2 = \frac{E_0^2 b^2}{2}, \text{ soit : } V = \frac{E_0 b}{\sqrt{2}}$$

Si on remarque que $E_0 \cdot b = V_0$ champ au centre du guide et que

$$E = E_0 \cos \pi \frac{x}{a}$$

on remarque que V est la valeur moyenne de la tension le long du côté a du guide ce qui est très satisfaisant pour l'esprit. Ce modèle de Z_c peut donc être retenu pour le mode TE_{10} .

Nous retiendrons en définitive qu'un guide d'onde peut être représenté par une ligne équivalente définie par V , Z_c et β_g sur laquelle peuvent être placées des constantes localisées.

2.5.8 Etude sommaire de divers modes de propagation guidée

Dans ce qui suit, nous allons énumérer divers modes de propagation guidée en donnant pour chacun d'eux :

- la longueur d'onde de coupure λ_c ,
- l'impédance d'onde transverse Z_T ,
- les vitesses de phase et de groupe.

Une répartition schématisée des champs E et H à l'intérieur du guide sera également précisée pour chaque mode de propagation.

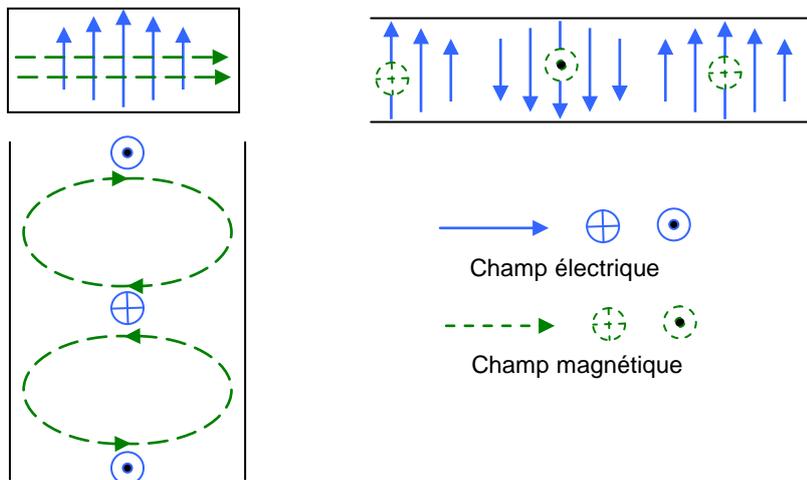
a Modes TE dans les guides rectangulaires

Ils sont caractérisés par le fait que E est toujours dans la section droite du guide. On les identifie par le nombre m de demi-périodes du champ électrique, dans le sens du côté a du guide et le nombre n de demi-périodes du champ électrique dans le sens du côté b du guide.

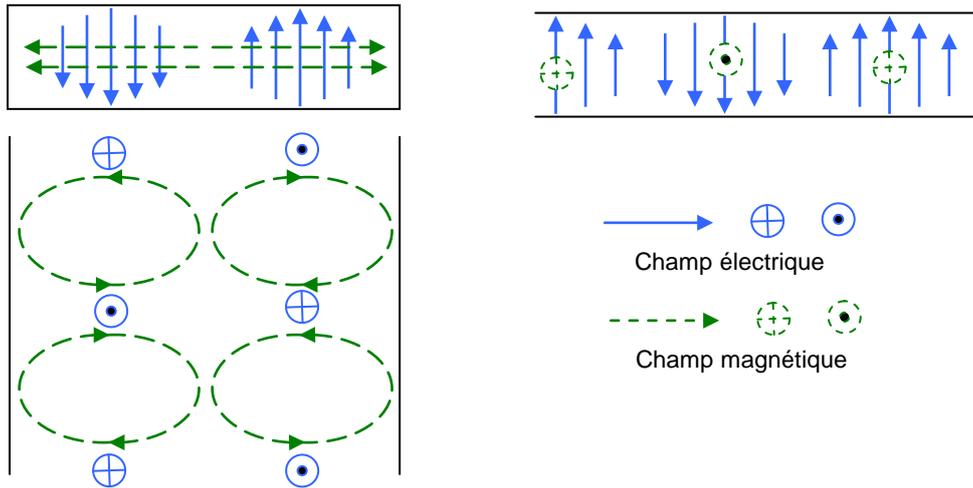
Les paramètres de l'onde, dans ce cas, sont :

$\lambda_{cmn} = \frac{2a \cdot b}{\sqrt{(mb)^2 + (na)^2}}$	$Z_{TE} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}}$
$v_g = W \cdot \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}$	$v_\phi = \frac{W}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}}$

MODE TE_{10} ($\lambda_c = 2a$)

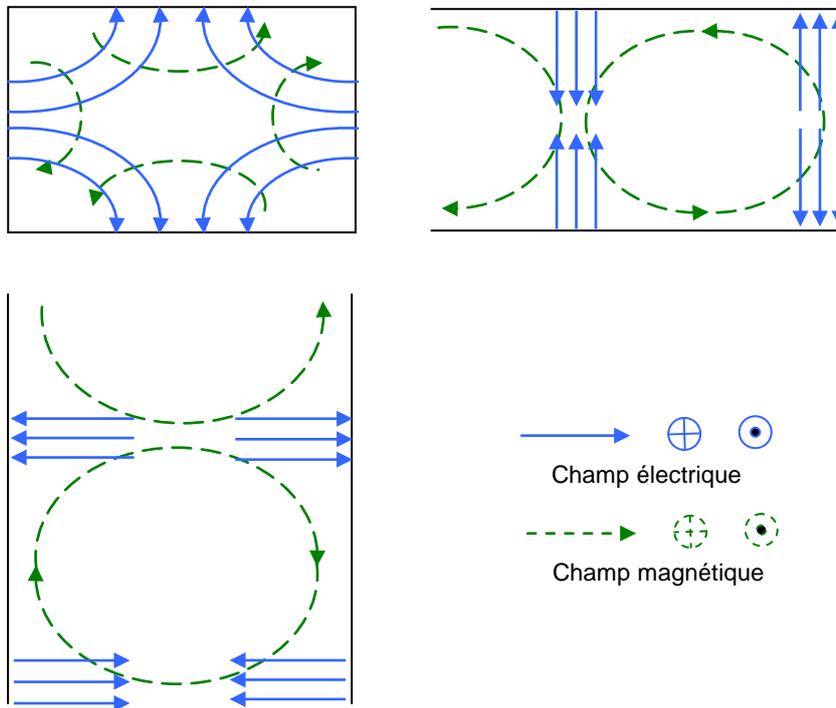


MODE TE₂₀ (λ_c = a)



MODE TE₁₁

$$\lambda_c = \frac{2a \cdot b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{2b}{\sqrt{1 + b^2/a^2}}$$



Tous les modes d'ordre supérieur au mode TE₁₁ s'obtiennent par superposition de modes TE₁₁.

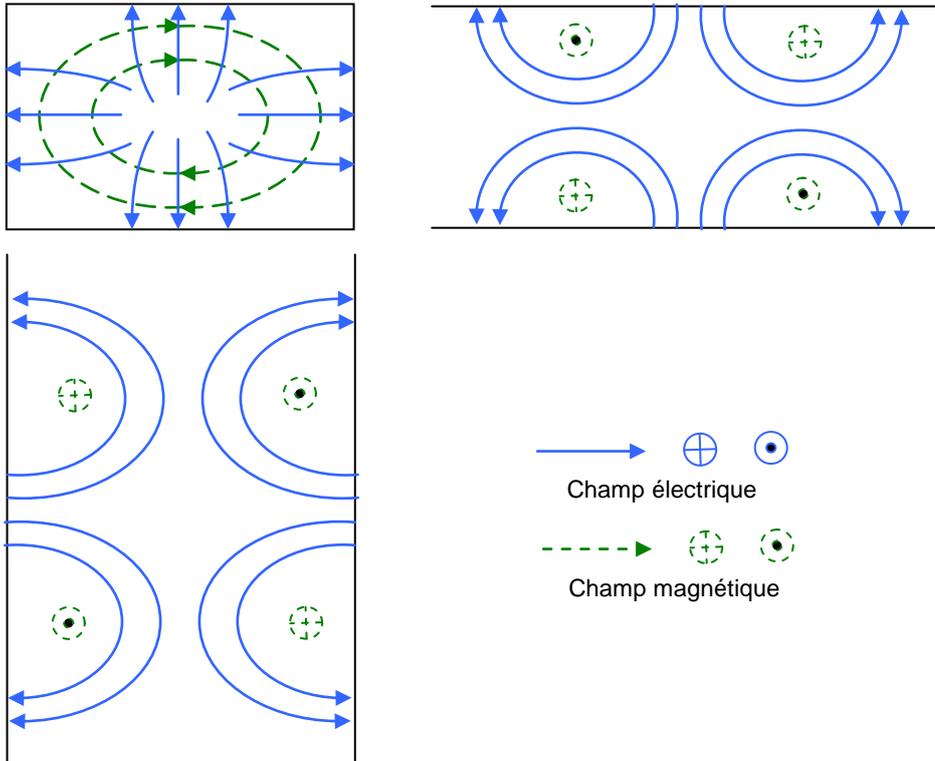
b Modes TM dans les guides rectangulaires

Ce sont des modes de propagation pour lesquels le champ magnétique reste dans la section droite du guide. Les conditions aux limites *E nul* ou *perpendiculaire* aux parois du guide ne peuvent être réalisées que pour des modes TM₁₁ ou d'ordre supérieur. Les paramètres de l'onde dans ce cas sont :

$\lambda_{cmn} = \frac{2a \cdot b}{\sqrt{(mb)^2 + (na)^2}}$	$Z_{TM} = \eta \cdot \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}$
$v_g = W \cdot \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}$	$v_\phi = \frac{W}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}}$

MODE TM₁₁

$$\lambda_c = \frac{2b}{\sqrt{1 + b^2/a^2}}$$



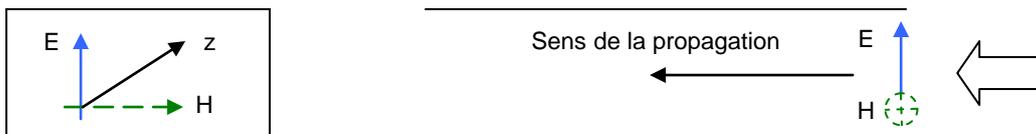
Tous les modes d'ordre supérieur au mode TM₁₁ s'obtiennent par superposition de modes TM₁₁.

Convention de signe :

L'énergie se propage dans le sens du produit vectoriel :

$$\vec{E} \wedge \vec{H};$$

D'où le schéma suivant, du sens de propagation de l'onde :



c Dimensionnement des guides rectangulaires

Le mode le plus utilisé (car il permet, à section donnée de guide, la transmission du maximum de puissance) est le mode TE₁₀.

La longueur de l'onde à transmettre devra donc être inférieure à $\lambda_{c10} = 2a$ et supérieure à la longueur d'onde de coupure des autres modes :

$$\lambda_{c20} = a ; \lambda_{c01} = 2b ; \lambda_{c11} = \frac{2b}{\sqrt{1 + b^2/a^2}} \text{ etc.}$$

En général, on choisit :

$$a > 2b$$

Le mode le plus gênant est alors le mode TE_{20} , ce qui amène :

$$a < \lambda < 2a$$

en pratique :

$$\frac{a}{b} = \frac{9}{4} \text{ et : } \lambda \cong a\sqrt{2}$$

En effet, il faut se tenir éloigné des valeurs de coupure pour éviter des atténuations prohibitives.

d Notions sur les guides circulaires

Les guides d'onde circulaires sont utilisés, en raison de leur symétrie particulière, dans des dispositifs tournants. Par ailleurs, leur forme simple rend leur usage économique et les fera préférer aux guides rectangulaires pour certaines applications où doivent être utilisées de grandes longueurs de guide (*par exemple : installation téléphonique Paris-Versailles*).

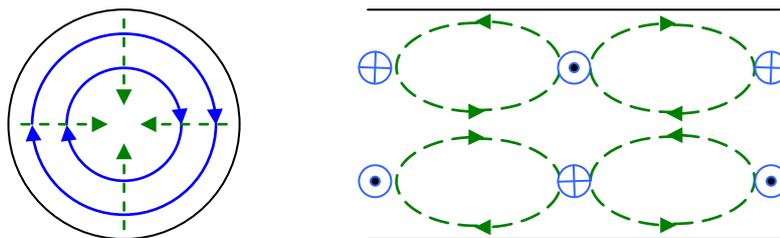
Des modes TE et TM peuvent se propager à l'intérieur d'un guide circulaire ; tous sont caractérisés par leur longueur d'onde λ_c . Ramenées à cette longueur d'onde, de coupure λ_c , les propriétés générales des ondes, dans un guide circulaire, sont les mêmes que dans les guides rectangulaires, soit :

$Z_{TE} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}}$	$Z_{TM} = \eta \cdot \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}$
$v_g = W \cdot \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}$	$v_\varphi = \frac{W}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}}$

Les modes les plus utilisés sont :

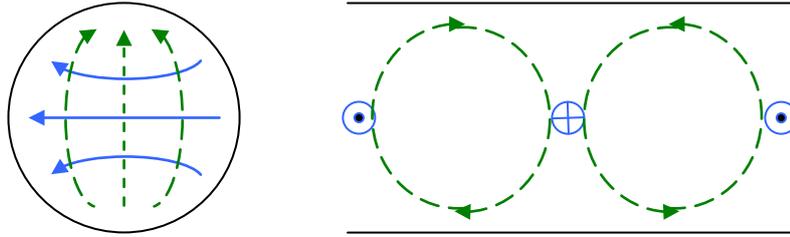
MODE TE_{01} ; $\lambda_c = 1,64r$

Caractérisé par une faible atténuation (r : rayon du guide).



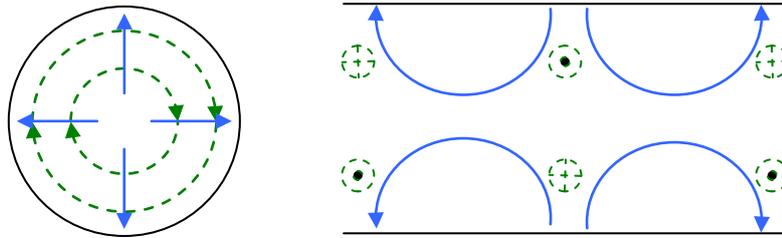
MODE TE_{11} ; $\lambda_c = 3,41r$

Il présente de nombreuses analogies avec le mode TE_{10} des guides rectangulaires. C'est le mode dominant des guides circulaires :



MODE TM_{01} ; $\lambda_c = 2,61r$

Il présente, comme le mode TE_{01} , une symétrie de révolution, ce qui permet de les utiliser dans des éléments comprenant une rotation mécanique.



On peut remarquer une analogie avec le mode de propagation TEM dans câbles coaxiaux.

e Dimensionnement d'un guide circulaire

Dans l'ordre, les longueurs d'onde de coupure dans les guides circulaires sont :

mode	TE_{11}	TM_{01}	TE_{21}	TM_{11}	TE_{01}
λ_c	3,41r	2,61r	2,05r	1,65r	1,64r

Si l'on veut exciter le mode TE_{11} , il suffira de choisir :

$$2,61r < \lambda < 3,41r$$

Dans le cas du mode TM_{01} , il faut :

$$2,05r < \lambda < 2,61r$$

mais le mode TE_{11} pourra se propager et devra être piégé.

Le mode TE_{01} , qui est également très intéressant, sera très délicat à exciter, car il faudra piéger les modes TE_{11} , TM_{01} , TE_{21} et TM_{11} .

En pratique, il faudra en outre se tenir assez loin de la fréquence de coupure du mode à propager, pour éviter des atténuations prohibitives.

2.5.9 Résumé des caractéristiques des guides d'onde

Les caractéristiques de la propagation dans les guides sont liées au rapport λ/λ_c . Ce sont :

Les impédances d'onde :

$$Z_{TE} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}}$$

$$Z_{TM} = \eta \cdot \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}$$

La vitesse de phase :

$$v_{\varphi} = \frac{\omega}{\beta_g} = \frac{W}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}} \quad \text{en espace libre } W = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$$

d'où l'on tire :

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}}$$

et :

$$\beta_g = \frac{\omega}{W} \cdot \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}$$

caractéristiques des figures d'onde.

La vitesse de groupe :

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = W \cdot \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}$$

ou vitesse de déplacement de l'énergie portée par l'onde.

On notera que :

$$\frac{v_{\varphi}}{\lambda_g} = \frac{W}{\lambda}$$

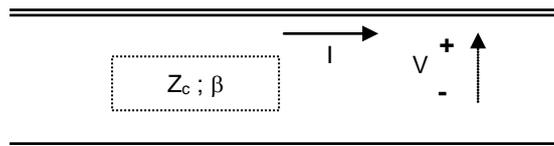
$$v_{\varphi} \cdot v_g = W^2$$

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda_c^2} + \frac{1}{\lambda_g^2}$$

2.6 TERMINAISONS DES LIGNES ET GUIDES

2.6.1 Mise en équation

Dans les précédents paragraphes, nous avons examiné les guides ou lignes de longueur infinie, sièges d'ondes progressives. Nous avons également vu que l'on pouvait ramener les guides ou lignes, au schéma équivalent suivant, sous la forme d'une ligne bifilaire, d'impédance Z_c , parcourue par une onde de vitesse de déplacement $W = \omega/\beta$, siège de tensions et courants respectivement en phase avec les champs E et H de l'onde, et se déplaçant à la vitesse W .



Dans le cas d'un guide d'onde, on prendra :

- $\beta = \beta_g$
- $Z_c =$ impédance caractéristique équivalente du guide

Les expressions de V et Z_c pour le mode TE_{10} , sont celles du paragraphe 2.5.7.

Considérons une telle ligne fermée sur une charge d'impédance Z_R . A l'instant zéro, cette ligne est excitée à son autre extrémité par un signal de pulsation ω . Une onde progressive va se former et des courants et tensions prendre naissance, satisfaisant les équations :

$$\left. \begin{aligned} v^+ &= V_o^+ \cdot e^{j(\omega t - \beta \cdot z)} \\ i^+ &= I_o^+ \cdot e^{j(\omega t - \beta \cdot z)} \end{aligned} \right\} \text{ pour une propagation vers les } z \text{ positifs.}$$

Ces tensions et courants vont atteindre la charge Z_R , une partie de l'énergie sera absorbée par la charge Z_R , l'autre partie sera réfléchiée sous la forme d'une onde se propageant en *sens inverse* de la précédente et caractérisée par ses tensions et courants :

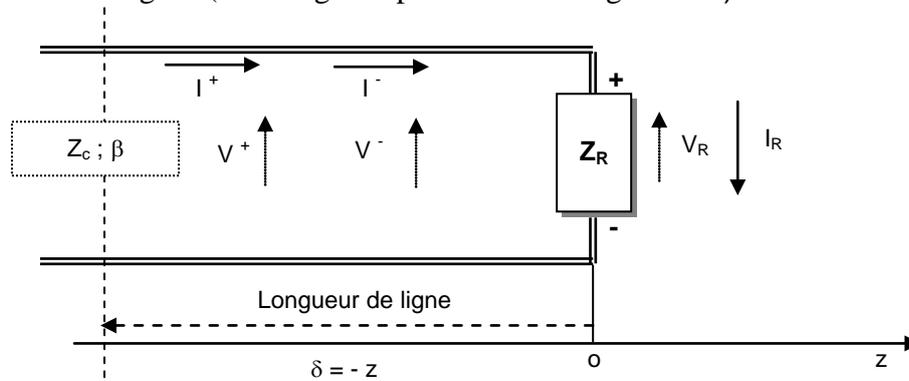
$$\left. \begin{aligned} v^- &= V_o^- \cdot e^{j(\omega t + \beta \cdot z)} \\ i^- &= I_o^- \cdot e^{j(\omega t + \beta \cdot z)} \end{aligned} \right\} \text{ pour une propagation vers les } z \text{ négatifs.}$$

Ainsi, en chaque point de la ligne, les tensions et courants seront la somme des tensions et courants élémentaires, soit :

$$v = v^+ + v^-$$

$$i = i^+ + i^-$$

Les relations liant ces courants et tensions peuvent être complétées en écrivant les lois de *Kirchhoff* aux bornes de la charge, en remarquant qu'avec les conventions choisies, le courant de l'onde inverse sera négatif (La charge est prise comme origine de z).



$$V_R = v^+ + v^-$$

$$i_R = i^+ + i^-$$

$$V_R = Z_R \cdot i_R$$

Par ailleurs, les expressions liant les tensions et courants des ondes élémentaires à l'impédance caractéristique de la ligne sont :

$$\frac{v^+}{i^+} = -\frac{v^-}{i^-} = Z_c$$

On peut donc écrire au niveau de la charge (à l'abscisse $z = 0$) :

- Equation des courants : $v^+ - v^- = Z_c \cdot i_R$
- Equation des tensions : $v^+ + v^- = V_R$

Soit :

$$v^+ = \frac{1}{2}(v_R + Z_c \cdot i_R) = V_o^+ \cdot e^{j\omega t}$$

$$v^- = \frac{1}{2}(v_R - Z_c \cdot i_R) = V_o^- \cdot e^{j\omega t}$$

Soit en un point quelconque de la ligne :

$$v = \frac{1}{2}(v_R + Z_c \cdot i_R) \cdot e^{-j\beta z} + \frac{1}{2}(v_R - Z_c \cdot i_R) \cdot e^{+j\beta z}$$

$$= V_R \left(\frac{e^{-j\beta z} + e^{+j\beta z}}{2} \right) + Z_c \cdot i_R \left(\frac{e^{-j\beta z} - e^{+j\beta z}}{2} \right)$$

ou, en posant $\delta = -z$:

$$v = v_R \cdot \cos \beta \delta + j \cdot Z_c \cdot i_R \cdot \sin \beta \delta$$

on démontrerait de même :

$$i = i_R \cdot \cos \beta \delta + \frac{j \cdot v_R}{Z_c} \cdot \sin \beta \delta$$

avec :

$$v_R = Z_R \cdot i_R = V_R \cdot e^{j\omega t}$$

Dans ces expressions, il n'y a plus de relation distance-temps comme dans l'onde progressive (terme $\omega t - \beta z$) ; les variations, dans le temps et le long de la ligne des courants et tensions, sont indépendantes. Il n'y a plus de déplacement de ces tensions et courants : le régime d'onde ainsi formé est un régime d'onde stationnaire.

2.6.2 Coefficients caractéristiques de l'onde stationnaire

a Coefficient de transmission T

C'est le rapport entre la tension incidence v^+ et la tension transmise à la charge v_R . Nous connaissons :

$$v^+ = \frac{1}{2}(v_R + Z_c \cdot i_R)$$

$$v_R = Z_R \cdot i_R$$

il vient :

$$T = \frac{v_R}{v^+} = \frac{2Z_R}{Z_c + Z_R}$$

ou en posant :

$$Y_R = \frac{1}{Z_R}, Y_c = \frac{1}{Z_c}$$

$$T = \frac{2Y_c}{Y_c + Y_R}$$

b Coefficient de réflexion R

C'est le rapport au niveau de la charge entre la tension incidente et la tension réfléchie, soit comme $v^+ + v^- = v_R$:

$$R = \frac{v^-}{v^+} = \frac{Z_R - Z_c}{Z_R + Z_c} = \rho \cdot e^{j\theta}$$

ou :

$$R = \frac{Y_c - Y_R}{Y_c + Y_R}$$

c Taux d'onde stationnaire TOS

C'est le rapport entre la tension maximale et la tension minimale rencontrées le long de la ligne. On peut trouver ces valeurs facilement à partir des expressions :

$$\begin{aligned} v &= v^+ + v^- \\ v^+ &= V_o^+ e^{+j\beta\delta} \\ v^- &= V_o^- e^{-j\beta\delta} \end{aligned}$$

qui montrent que, les phases des deux ondes varient en sens inverse le long de la ligne, il existe des points où v_1 et v_2 sont en phase, d'autres où ils sont en opposition.

La distance entre deux extrema successifs (maximum ou minimum), est donnée par :

$$2\beta \cdot \Delta\delta = 2\pi$$

soit :

$$\Delta\delta = \lambda / 2$$

De même, pour passer d'un maximum à un minimum, il faut que la phase relative des deux ondes tourne de π , soit :

$$2\beta \cdot \Delta\delta_1 = \pi$$

$$\Delta\delta_1 = \lambda / 4$$

nous aurons alors :

$$V_{\max} = |v^+| + |v^-|$$

$$V_{\min} = |v^+| - |v^-|$$

et comme :

$$v_2 / v_1 = R = \rho \cdot e^{j\theta}$$

$$S = \frac{V_{\max}}{V_{\min}} = \frac{1 + \rho}{1 - \rho}$$

et comme :

$$0 < \rho < 1$$

$$1 < S < \infty$$

On peut inverser cette relation, ce qui donne :

$$|R| = \rho = \frac{S-1}{S+1}$$

d Bilan de puissance

La puissance portée par l'onde réfléchie P_2 est égale à ρ^2 fois la puissance de l'onde incidente P_1 (car les impédances de ligne sont identiques au signe près).

$$P_2 = \rho^2 \cdot P_1$$

La puissance transmise vers la charge est donc :

$$P_T = P_1 - P_2 = (1 - \rho^2) P_1$$

en fonction du TOS, nous retiendrons :

$$\frac{P_2}{P_1} = \rho^2 = \left(\frac{S-1}{S+1} \right)^2$$

$$\frac{P_T}{P_1} = 1 - \rho^2 = \frac{4S}{(S+1)^2}$$

2.6.3 Transformation des impédances le long d'une ligne

Les relations du paragraphe 2.6.1 permettent d'écrire pour un tronçon de longueur δ de ligne :

$$v = v_R \cos \beta \delta + j Z_c i_R \sin \beta \delta$$

$$i = \frac{jv_R}{Z_c} \sin \beta \delta + i_R \cos \beta \delta$$

avec :

$$v_R = Z_R \cdot i_R.$$

L'impédance de l'onde le long de la ligne est définie par la relation :

$$Z_i = \frac{v}{i}$$

Différents cas peuvent être considérés :

a $Z_R = Z_c$

Dans ce cas, il vient :

$$Z_i = \frac{Z_c \cdot \cos \beta \delta + j \cdot Z_c \cdot \sin \beta \delta}{\cos \beta \delta + j \cdot \sin \beta \delta} = Z_c$$

par ailleurs :

$$R = \frac{Z_R - Z_c}{Z_R + Z_c} = 0$$

La ligne se comporte comme une ligne infinie, ce qui justifie les considérations du paragraphe 2.3.

b Z_R quelconque

Dans ce cas, il vient :

$$Z_i = \frac{Z_R \cdot \cos \beta \delta + j \cdot Z_c \cdot \sin \beta \delta}{\cos \beta \delta + j \frac{Z_R}{Z_c} \cdot \sin \beta \delta}$$

$$Z_i = Z_c \frac{Z_R \cdot \cos \beta \delta + j \cdot Z_c \cdot \sin \beta \delta}{Z_c \cdot \cos \beta \delta + j \cdot Z_R \cdot \sin \beta \delta}$$

Cette équation peut se mettre sous la forme d'une équation aux admittances en posant :

$$Y_c = \frac{1}{Z_c} \quad Y_i = \frac{1}{Z_i} \quad Y_R = \frac{1}{Z_R}$$

et en portant ces relations dans l'équation précédente, soit :

$$\frac{1}{Y_i} = \frac{\frac{1}{Y_R} \cdot \cos \beta \delta + j \frac{1}{Y_c} \cdot \sin \beta \delta}{\cos \beta \delta + j \frac{Y_c}{Y_R} \cdot \sin \beta \delta} = \frac{\cos \beta \delta + j \frac{Y_R}{Y_c} \cdot \sin \beta \delta}{Y_R \cdot \cos \beta \delta + j \cdot Y_c \cdot \sin \beta \delta}$$

d'où :

$$Y_i = Y_c \frac{Y_R \cdot \cos \beta \delta + j Y_c \cdot \sin \beta \delta}{Y_c \cdot \cos \beta \delta + j Y_R \cdot \sin \beta \delta}$$

Pour $\delta = 0$ on retrouve bien $Z_i = Z_R$ et $Y_i = Y_R$

Ces impédances ou admittances sont périodiques le long de la ligne, comme le montrent les calculs ci – après :

$$Z_i(\beta \delta + 2\pi) = Z_i(\beta \delta)$$

$$Z_i(\beta \delta + \pi) = \frac{Z_R(-\cos \beta \delta) + j \cdot Z_c(-\sin \beta \delta)}{Z_c(-\cos \beta \delta) + j \cdot Z_R(-\sin \beta \delta)} = Z_i(\beta \delta)$$

$$Z_i(\beta \delta + \frac{\pi}{2}) = \frac{Z_R(-\sin \beta \delta) + j \cdot Z_c \cdot \cos \beta \delta}{Z_c(-\sin \beta \delta) + j \cdot Z_R \cdot \cos \beta \delta} \neq Z_i(\beta \delta)$$

Z_i est une fonction périodique de la variable $\beta \delta$ de période π et comme on connaît : $\beta = 2\pi/\lambda$, cela revient à dire que :

$$Z_i \text{ est une fonction périodique de } \delta, \text{ de période } \frac{\lambda}{2}$$

c $Z_R = 0$, ligne court circuitée à son extrémité

Dans ce cas, $V_R = 0$ et :

$$Z_i = Z_c \cdot j \cdot \operatorname{tg} \beta \delta = Z_c \cdot j \cdot \operatorname{tg} \frac{2\pi \delta}{\lambda}$$

L'impédance Z_i est imaginaire pure.

d $Z = \infty$, ligne en circuit ouvert à son extrémité

Dans ce cas : $i_R = 0$ et :

$$Z_i = j \cdot Z_c \cdot \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} \left(\delta + \frac{\lambda}{4} \right)$$

On retrouve le cas précédent avec un décalage de $\lambda / 4$.

e Ligne quart d'onde

$$\delta = \lambda / 4$$

$$\beta\delta = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = \frac{\pi}{2}$$

$$Z_i \left(\frac{\lambda}{4} \right) = Z_c \frac{j \cdot Z_c}{j \cdot Z_R} = \frac{Z_c^2}{Z_R}$$

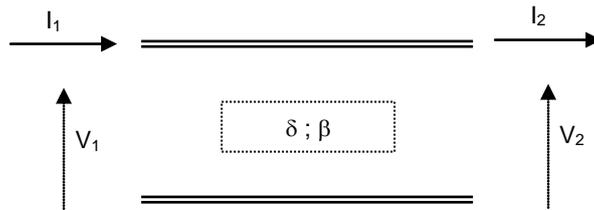
$$Z_i \cdot Z_R = Z_c^2$$

Cette propriété sera utilisée dans les transformateurs d'impédance.

2.7 MATRICE DE TRANSFERT D'UNE LIGNE

2.7.1 Cas général

L'équation établie au paragraphe 2.6.3 se généralise entre deux points quelconques distants d'une longueur δ sur une ligne et permet de relier les courants et tensions composés par les relations :



$$v_1 = v_2 \cos \beta\delta + j i_2 Z_c \sin \beta\delta$$

$$i_1 = j v_2 Y_c \sin \beta\delta + i_2 \cos \beta\delta$$

Ce qui permet de définir la matrice de transfert d'un tronçon de longueur finie d'une ligne :

$$\begin{vmatrix} v_1 \\ i_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \beta\delta & j Z_c \sin \beta\delta \\ j Y_c \sin \beta\delta & \cos \beta\delta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_2 \\ i_2 \end{vmatrix}$$

Cette relation est valable quels que soient v_2 et i_2 , par exemple si $v_2 = Z_c i_2$, on retrouve bien :

$$v_1 = v_2 (\cos \beta\delta + j \sin \beta\delta) = v_2 e^{j\beta\delta}$$

$$i_1 = i_2 (j \sin \beta\delta + \cos \beta\delta) = i_2 e^{j\beta\delta}$$

expression d'une onde progressive.

2.7.2 Application aux lignes de courte longueur

La matrice de transfert caractérisant un tronçon de longueur faible peut s'écrire :

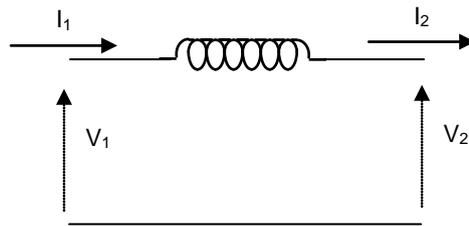
$$\sin \beta\delta \cong \beta\delta, \quad \cos \beta\delta \cong 1$$

$$\begin{vmatrix} v_1 \\ i_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & jZ_c\beta\delta \\ jY_c\beta\delta & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_2 \\ i_2 \end{vmatrix}$$

si $Z_c \gg 1$, $jY_c\beta\delta$ est négligeable, on aboutit à :

$$\begin{vmatrix} v_1 \\ i_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & jZ_c\beta\delta \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_2 \\ i_2 \end{vmatrix}$$

Cette matrice est analogue à la matrice de transfert d'une self série :



$$\begin{vmatrix} v_1 \\ i_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & j2\omega L \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_2 \\ i_2 \end{vmatrix}$$

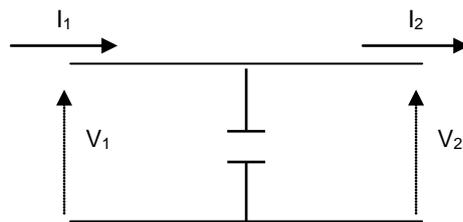
d'où après identification des deux matrices :

$$L = Z_c \delta \frac{\beta}{\omega} = \frac{Z_c \delta}{v_\phi}$$

si $Y_c \gg 1$, $jZ_c\beta\delta$ est négligeable, la matrice de transfert devient :

$$\begin{vmatrix} v_1 \\ i_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ jY_c\beta\delta & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_2 \\ i_2 \end{vmatrix}$$

C'est la même que celle d'une capacité parallèle :



$$\begin{vmatrix} v_1 \\ i_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ jC\omega & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_2 \\ i_2 \end{vmatrix}$$

avec :

$$C = Y_c \delta \frac{\beta}{\omega} = \frac{Y_c \delta}{v_\phi}$$

Ces variations d'impédances sont très faciles à réaliser en ligne microstrip et peuvent par exemple servir à réaliser des réseaux LC type filtres passe bande.

