

CHAPITRE 5 - LES ANTENNES

Rédigé vec la collaboration de monsieur Jacques DEBRAND

Première partie : Aspects théoriques

1	GÉNÉRALITÉS	2
2	DIAGRAMME DE RAYONNEMENT	2
3	GAIN ET DIRECTIVITÉ.....	4
3.1	GAIN D'UNE ANTENNE	4
3.2	DIRECTIVITÉ	4
4	SURFACE EFFECTIVE	6
5	GROUPEMENT DE SOURCES RAYONNANTES	6
5.1	INTRODUCTION	6
5.2	THEOREME DE MULTIPLICATION DES DIAGRAMMES	6
5.3	ALIGNEMENT DE SOURCES D'AMPLITUDES IDENTIQUES	7
5.3.1	Fonction caractéristique et diagramme de rayonnement	9
5.3.2	Lobes de périodicité.....	10
5.4	DIRECTIVITE D'UN ALIGNEMENT	11
5.4.1	Définition.....	11
5.4.2	Méthode de calcul.....	12
5.4.3	Interprétation des résultats	14
5.5	CAS LIMITE – ALIGNEMENT D'UN GRAND NOMBRE DE SOURCES	15
5.6	RÉSEAUX PLANS DE SOURCES D'AMPLITUDES IDENTIQUES.....	17
5.7	NOTIONS SUR LES RÉSEAUX RÉFLECTEURS	19
5.8	RÉSEAUX DE SOURCES D'AMPLITUDES DIFFÉRENTES	20
5.8.1	Optimisation – méthode de Dolph - Tchebycheff	23
5.8.2	Autres lois : Exemples	24
6	RAYONNEMENT DES OUVERTURES.....	26
6.1	FORMULES GÉNÉRALES	26
6.2	APPLICATION PRATIQUE DIAGRAMMES PRINCIPAUX D'UNE OUVERTURE PLANE	28
6.3	GAIN D'UNE OUVERTURE PLANE.....	29
6.4	SURFACE EFFECTIVE D'UNE OUVERTURE PLANE.....	31
6.5	OUVERTURE RECTANGULAIRE.....	31
6.5.1	Cas où la loi de répartition est uniforme : $A(x) = cte = A_0$	33
6.6	INFLUENCE D'UNE VARIATION DE PHASE LE LONG DE L'OUVERTURE	34
6.7	OUVERTURE RECTANGULAIRE À ILLUMINATION NON UNIFORME.....	35
6.8	LES OUVERTURES CIRCULAIRES	37
6.8.1	Répartition uniforme du rayonnement	38
6.8.2	Réduction des lobes secondaires.....	39
7	RELATIONS D'APPLICATION.....	40
7.1	FORMULES DE L'ANTENNE THÉORIQUE.....	40
7.2	FORMULES DE L'ANTENNE PRATIQUE.....	41
8	LES PARABOLOÏDES DE RÉVOLUTION	42
8.1	OUVERTURE ÉQUIVALENTE	42
8.2	DIAGRAMME DE RAYONNEMENT	43
8.3	GAIN DU PARABOLOÏDE	44
8.4	DÉFOCALISATION DE LA SOURCE PRIMAIRE.....	46
8.5	ANTENNES À BALAYAGE CONIQUE DU FAISCEAU.....	49
8.5.1	Cas d'une liaison émission réception.....	50
8.5.2	Cas d'une liaison réception seule.....	51

1 GÉNÉRALITÉS

Une antenne est un dispositif qui réalise la transition et le transfert des ondes entre un milieu guidé et l'espace dans lequel ces ondes vont se propager, ceci dans les deux sens de propagation.

L'antenne assure donc :

- l'adaptation entre le « milieu guidé » ou « guide d'onde » (au sens général) et l'espace libre ; lorsque cette adaptation est parfaite, la transition se fait sans perte, c'est-à-dire que toute l'énergie provenant du « milieu guidé » est rayonnée dans l'espace ;
- la répartition de l'énergie rayonnée dans l'espace, répartition qui traduit l'importance relative du rayonnement selon la direction considérée ; elle se caractérise par le diagramme de rayonnement de l'antenne.

La construction d'une antenne nécessitera, en particulier, la connaissance :

- de la plage de fréquence à transmettre (bande passante) ;
- du diagramme de rayonnement ;
- du gain (qui est, sauf spécification contraire, le gain dans la direction du maximum de rayonnement) ;
- de la puissance à transmettre (tenue en puissance) ;
- des problèmes liés à l'adaptation de l'antenne, aussi bien dans son milieu interne que dans le milieu extérieur, particulièrement dans le cas où un aérien peut comporter plusieurs sources rayonnantes.

Nous nous contenterons dans ce chapitre, de considérer les antennes vues par leurs utilisateurs, de manière à mettre en évidence les propriétés caractéristiques des aériens, sans entrer dans le détail de leur réalisation, d'où une limitation de l'étude des phénomènes mis en jeu au niveau des principes.

En outre, nous bornerons cet examen aux aériens hyperfréquence utilisés en radar.

2 DIAGRAMME DE RAYONNEMENT

Le diagramme de rayonnement d'une antenne représente la répartition de l'énergie rayonnée dans l'espace.

Soit une direction OM de l'espace repérée par les angles θ et Φ ; et u le vecteur unitaire porté par OM, le diagramme de rayonnement est le lieu des points M tel que la longueur OM soit proportionnelle à la densité de puissance par unité d'angle solide $w(\theta, \Phi)$ rayonnée dans la direction considérée.

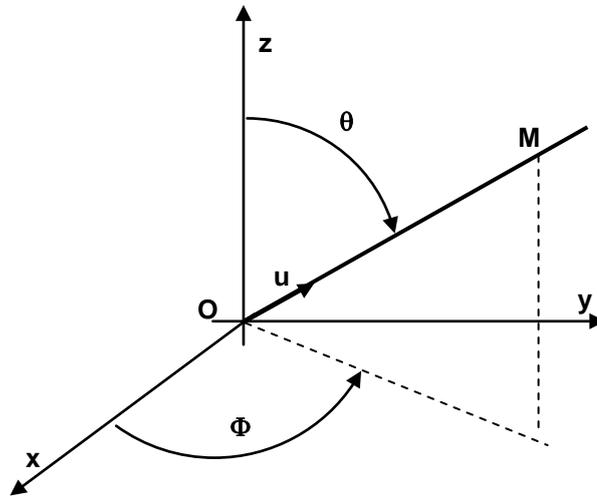
La connaissance du diagramme de rayonnement d'une antenne nécessite la connaissance de la répartition de puissance rayonnée dans l'espace, ou de la répartition de champs électriques

$$E(\theta, \Phi).$$

Ces deux paramètres sont liés entre eux ; en effet, la densité de puissance rayonnée par unité de surface pour une onde hyperfréquence est donnée par la relation, faisant apparaître le vecteur de Poynting :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{H}}{2}$$

$$\frac{dW}{ds} = \vec{\Pi} \cdot \vec{u} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{H}}{2} \cdot \vec{u}$$



Lorsque l'onde sinusoïdale est issue du point O, et la surface considérée inscrite sur une sphère de centre « O » et de rayon r ($\vec{E} \wedge \vec{H}$ parallèle à u) l'expression devient :

$$\frac{dW}{ds} = \left| \frac{\vec{E} \wedge \vec{H}}{2} \right| = \frac{|E|^2}{240 \pi}$$

$|E|$ étant la norme du champ électrique et $\eta = 120 \pi$ l'impédance de l'onde

$$|E(\theta, \Phi)| = \sqrt{E \cdot E^*}$$

On peut donc écrire ($ds = r^2 d\Omega$) :

$$\frac{dW}{d\Omega} = w(\theta, \Phi) = \frac{dW}{ds} \cdot \frac{ds}{d\Omega} = \frac{|E(\theta, \Phi)|^2 \cdot r^2}{240 \pi}$$

Soit :

$$w(\theta, \Phi) = \frac{|E(\theta, \Phi)|^2 \cdot r^2}{240 \pi}$$

Dans la plupart des cas, le diagramme de rayonnement d'une antenne se compose d'un lobe important appelé « *lobe principal* » et de lobes d'amplitudes plus faibles appelés « *lobes latéraux* » ou « *lobes secondaires* ».

La plus grande partie de l'énergie rayonnée est concentrée dans le lobe principal. Néanmoins, le niveau des lobes secondaires peut avoir son importance, notamment dans les applications radar, où il doit être maintenu aussi bas que possible.

La connaissance complète de la répartition spatiale du rayonnement de l'aérien nécessiterait la connaissance de la surface engendrée par la suite des points M, surface qui est généralement assez complexe.

Aussi, on se contente souvent d'étudier le rayonnement dans deux plans perpendiculaires passant par la direction du maximum de gain de l'aérien plan vertical et plan horizontal par exemple, ou plan contenant le vecteur champ électrique (*plan E*) et plan contenant le vecteur champ magnétique (*plan H*). On parle alors de diagramme de rayonnement dans chacun des plans considérés.

3 GAIN ET DIRECTIVITÉ

3.1 GAIN D'UNE ANTENNE

Lorsque l'on s'intéresse au rayonnement à grande distance d'une antenne, on peut la considérer comme une source ponctuelle rayonnant une densité de puissance par unité d'angle solide fonction uniquement de la direction considérée.

Le gain de l'antenne dans cette direction $G(\theta, \Phi)$ est défini par le rapport de la puissance rayonnée par une unité d'angle solide $w(\theta, \Phi)$ à la puissance par unité d'angle solide w_1 qui serait rayonnée, dans la même direction, par une source isotrope alimentée par la même puissance :

$$G(\theta, \Phi) = \frac{w(\theta, \Phi)}{w_1}$$

La source isotrope, ou omnidirectionnelle, n'a pas d'existence physique, c'est une source fictive qui aurait la propriété de rayonner des ondes identiques dans toutes les directions. En particulier la puissance délivrée à la source est répartie uniformément dans tout l'espace.

La densité de puissance par unité d'angle solide émise par une source isotrope isolée est donc :

$$w_1 = \frac{W_t}{4\pi}$$

si W_t est la puissance totale transmise à la source, d'où :

$$G(\theta, \Phi) = \frac{w(\theta, \Phi) \cdot 4\pi}{W_t}$$

3.2 DIRECTIVITÉ

La puissance totale rayonnée par tout aérien est l'intégrale étendue à tout l'espace de la densité de puissance $w(\theta, \Phi)$ soit :

$$W = \iint w(\theta, \Phi) \cdot d\Omega$$

Elle est égale à W_t puissance transmise à l'aérien, si la répartition de puissance par l'aérien se fait sans pertes.

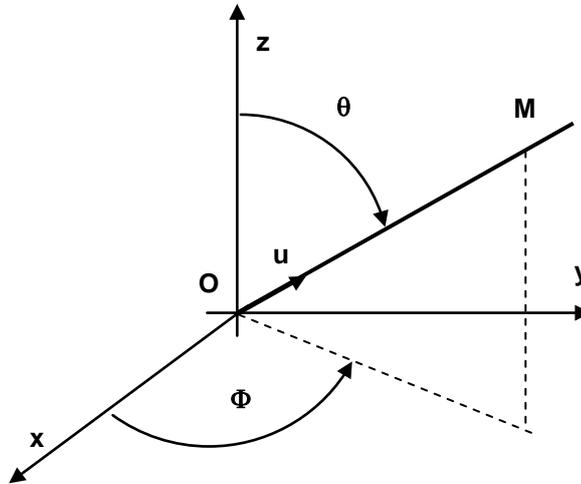
Dans le cas contraire, si l'on se réfère à cette puissance rayonnée W , on obtient la directivité d'une antenne définie comme :

$$D(\theta, \Phi) = \frac{w(\theta, \Phi) 4\pi}{W}$$

soit :

$$D(\theta, \Phi) = \frac{4\pi \cdot w(\theta, \Phi)}{\iint w(\theta, \Phi) \cdot d\Omega}$$

Dans le système d'axes défini au paragraphe 2, on peut écrire :



$$0 \leq \Phi \leq 2\pi$$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

$$d\Omega = \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\Phi$$

$$D(\theta, \Phi) = \frac{4\pi \cdot w(\theta, \Phi)}{\int_0^{2\pi} d\Phi \int_0^\pi w(\theta, \Phi) \sin \theta \cdot d\theta}$$

Cette expression se simplifie si le diagramme de rayonnement est de révolution autour de l'axe OZ car alors w n'est plus fonction que de la seule variable θ . L'expression de la directivité devient alors, pour un diagramme de révolution autour de OZ :

$$D(\theta) = \frac{4\pi \cdot w(\theta)}{\int_0^{2\pi} d\Phi \int_0^\pi w(\theta) \sin \theta \cdot d\theta}$$

$$D(\theta) = \frac{2 \cdot w(\theta)}{\int_0^\pi w(\theta) \sin \theta \cdot d\theta}$$

$D(\theta, \Phi)$ est égal à $G(\theta, \Phi)$ lorsque toute la puissance transmise à l'antenne est effectivement rayonnée. En général, il faut écrire ($\eta < 1$) :

$$G(\theta, \Phi) = \eta \cdot D(\theta, \Phi)$$

4 SURFACE EFFECTIVE

A la réception, l'antenne se conduit comme un collecteur d'onde. Une des manières de la caractériser est alors de considérer que l'antenne se comporte comme un collecteur d'onde de surface effective A , qui recueille toute la puissance qui la traverse soit :

$$W_R = \iint_A \vec{\Pi} \cdot \vec{ds}$$

Si l'amplitude du vecteur de Poynting de l'onde Π est constante le long de la surface A et si Π est perpendiculaire à la surface fictive A , ce qui est en pratique toujours réalisé, on peut écrire pour chaque point de l'espace :

$$W_R = \Pi \cdot A$$

Or, la surface effective d'une antenne dépend de la direction d'où provient l'onde incidente, A est donc une fonction de θ et Φ et l'on a :

$$W_R(\theta, \Phi) = \Pi \cdot A(\theta, \Phi)$$

D'après le principe de réciprocité (*ou théorème de Carson*), une antenne a le même comportement relatif à l'émission et à la réception ; ce qui permet d'écrire :

$$\boxed{\frac{A(\theta, \Phi)}{A_M} = \frac{G(\theta, \Phi)}{G_M} = |F(\theta, \Phi)|^2}$$

qui sont deux expressions du diagramme de rayonnement (*fonction caractéristique*) d'un aérien, à la réception et à l'émission du signal.

5 GROUPEMENT DE SOURCES RAYONNANTES

5.1 INTRODUCTION

Pour obtenir une certaine directivité, on peut, soit utiliser une source unique de structure complexe, soit opérer un groupement de sources rayonnantes.

Ces groupements sont appelés « *réseaux* » dans le cas où toutes les sources sont identiques et se déduisent les unes des autres par translation. Ces sources peuvent être alimentées avec des amplitudes et des phases différentes.

Le diagramme de rayonnement obtenu dépendra de la position des sources dans l'espace, ainsi que des amplitudes et des phases des signaux alimentant chacune d'elles.

Ces groupements peuvent être limités à des domaines d'espace particuliers, droites : *alignements*, ou surfaces planes : *réseaux plans*. Nous limiterons notre étude à ces deux cas simples, en ne considérant en outre que des sources régulièrement espacées.

5.2 THEOREME DE MULTIPLICATION DES DIAGRAMMES

Ce théorème qui s'applique à la région du champ de rayonnement lointain de l'antenne réseau, et qui résulte du caractère linéaire des équations de *Maxwell*, a un très grand intérêt car il permet de ramener l'étude du rayonnement de l'antenne réelle à celle d'un réseau semblable mais constitué seulement d'éléments rayonnants isotropes. Son énoncé est le suivant :

Si $F_1(\theta, \Phi)$ est l'expression du diagramme de rayonnement (fonction caractéristique) d'une source S_1 , $F_2(\theta, \Phi)$ le diagramme de rayonnement d'un réseau de sources isotropes, la

fonction caractéristique d'un réseau de sources S_1 , conforme au précédent, sera :

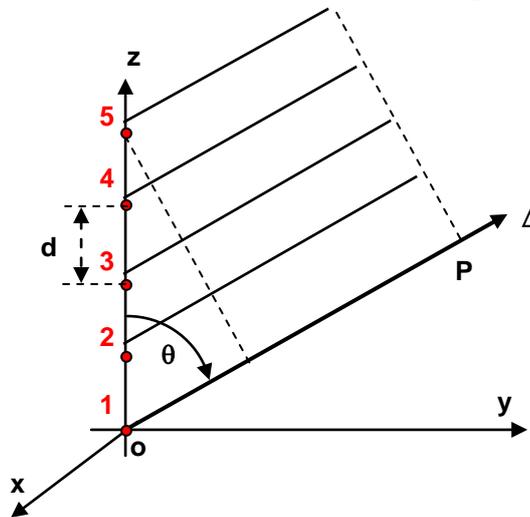
$$F(\theta, \Phi) = F_1(\theta, \Phi) \cdot F_2(\theta, \Phi)$$

Ce théorème peut se généraliser, car tout groupement peut, à son tour, être considéré comme une source unique. Bien que son emploi soit d'un usage constant dans l'étude des réseaux, on ne doit pas perdre de vue les limitations de son utilisation :

- Il permet de déterminer les diagrammes de rayonnement mais non les impédances. En effet, l'antenne isotrope étant une antenne idéale irréalisable, on ne peut pas lui associer d'impédance. En outre, la partie réactive de l'impédance dépend essentiellement du rayonnement dans la région du champ proche de l'antenne et le théorème ne s'applique pas dans cette région.
- La fonction caractéristique de chaque élément rayonnant devrait tenir compte du rayonnement de cet élément en présence des autres, qui peut être différent du rayonnement de l'élément isolé, si les éléments sont très couplés entre eux. Pour cette raison, le théorème de multiplication des fonctions caractéristiques donne de bons résultats au voisinage du lobe principal, mais peut conduire à des erreurs sur la position et l'amplitude des lobes latéraux éloignés.

5.3 ALIGNEMENT DE SOURCES D'AMPLITUDES IDENTIQUES

Considérons un alignement suivant l'axe OZ de n sources isotropes distantes entre elles de d.



La variation de phase entre les signaux excitant deux sources successives est ϕ . Les amplitudes de ces signaux sont toutes identiques.

Soit une source quelconque considérée isolément. Si W est la puissance rayonnée par cette source en l'absence des autres, la densité de puissance par unité de surface rayonnée à travers une sphère de rayon r est :

$$w_r = \frac{W}{4\pi r^2} = \frac{|E|^2}{240\pi}$$

de sorte que l'amplitude du champ électrique de l'onde rayonnée par une source isotrope varie comme $1/r$.

En outre, le long d'un trajet de longueur r , si β est la constante de propagation de l'onde progressive, sa phase a varié de :

$$-\frac{2\pi \cdot r}{\lambda} = -\beta \cdot r$$

Il en résulte que le champ de l'onde rayonnée à distance r par une source isotrope a pour expression générale :

$$E = \frac{k}{r} \cdot \exp\{-j\beta \cdot r + j\phi_0\}$$

Nous considérons que cette expression reste vraie lorsque la source est en présence des autres, et nous allons rechercher l'expression du champ E_θ rayonné à une distance r très grande devant la dimension de l'alignement dans une direction $O\Delta$ faisant un angle θ avec l'axe OZ . Si r est suffisamment grand, on peut considérer que tout point P de l'axe $O\Delta$ est vu sous le même angle par toutes les sources. E_θ est une fonction des seules variables r et θ , le diagramme de rayonnement de chaque source étant de révolution autour de OZ .

Ce champ E_θ est la somme des champs élémentaires rayonnés par chaque source ; ces champs étant tous colinéaires (car perpendiculaires à la direction de propagation $O\Delta$), cette somme est une somme algébrique :

$$E_1 = \frac{k}{r_1} e^{-j\beta \cdot r_1}$$

$$E_2 = \frac{k}{r_2} e^{(-j\beta \cdot r_2 + j\phi)}$$

.....

$$E_n = \frac{k}{r_n} e^{(-j\beta \cdot r_n + (n-1)j\phi)}$$

avec ϕ : déphasage introduit avant recombinaison entre chaque source. Par ailleurs, on peut écrire :

$$r_n = r_1 - (n - 1) \cdot d \cdot \cos \theta \quad , \quad \text{avec } \theta = \text{angle}\{OZ.OP\},$$

et comme :

$$r \gg nd, \quad \frac{1}{r_1} \cong \frac{1}{r_2} \cong \frac{1}{r_n} \cong \frac{1}{r}$$

$$E_\theta = E_1 + E_2 + \dots \dots \dots E_n$$

$$E_\theta = \frac{k}{r} e^{-j\beta r} \cdot \sum_1^n \cdot e^{j(n-1)(\beta d \cdot \cos \theta + \phi)}$$

Posons :

$$E_o = \frac{k}{r} e^{-j\beta r} \quad ; \quad \psi = \frac{2\pi d}{\lambda} \cos \theta + \phi = \beta \cdot d \cdot \cos \theta + \phi$$

il vient :

$$E_\theta = E_o \left[1 + e^{j\psi} + e^{2j\psi} + \dots \dots + e^{j(n-1)\psi} \right]$$

Cette expression est une progression géométrique de raison $q = e^{j\psi}$ dont la somme s'écrit :

$$E_{\theta} = E_o \frac{1 - q^n}{1 - q} = E_o \frac{1 - e^{jn\psi}}{1 - e^{j\psi}}$$

$$E_{\theta} = E_o \frac{e^{jn \frac{\psi}{2}}}{e^{j \frac{\psi}{2}}} \cdot \frac{e^{-jn \frac{\psi}{2}} - e^{jn \frac{\psi}{2}}}{e^{-j \frac{\psi}{2}} - e^{j \frac{\psi}{2}}}$$

Expression dont le module est :

$$|E_{\theta}| = n |E_o| \frac{\sin(n \frac{\psi}{2})}{n \cdot \sin(\frac{\psi}{2})}$$

E_o n'est pas connu à priori, on s'intéresse donc uniquement à la variation relative de l'amplitude du champ électrique donné par la relation :

$$f(\psi) = \frac{\sin(n \frac{\psi}{2})}{n \cdot \sin(\frac{\psi}{2})} \text{ avec } \psi = \frac{2\pi d}{\lambda} \cos \theta + \phi$$

appelée fonction caractéristique de l'alignement.

5.3.1 Fonction caractéristique et diagramme de rayonnement

On remarque que cette fonction est égale à 1 pour $\psi = 0$, ce qui correspond à la direction de rayonnement maximum de l'aérien. Elle présente d'autres maximums de niveaux beaucoup plus faibles qui décroissent lorsque ψ augmente, pour des valeurs de ψ données par la relation :

$$\text{tg } \frac{n \psi}{2} = n \cdot \text{tg } \frac{\psi}{2}$$

En outre, cette fonction s'annule pour $\psi \neq 0$ et $\sin(n \psi/2) = 0$, soit :

$$\frac{n \cdot \psi}{2} = k \cdot \pi, \text{ ou : } \psi = \frac{2k\pi}{n}$$

Par ailleurs, la période (au signe près) de $f(\psi)$ est de 2π , et $f(\psi)$ est symétrique par rapport à $\psi = 0$, d'où la position des zéros :

$$n = 2 ; \psi = \pm \pi$$

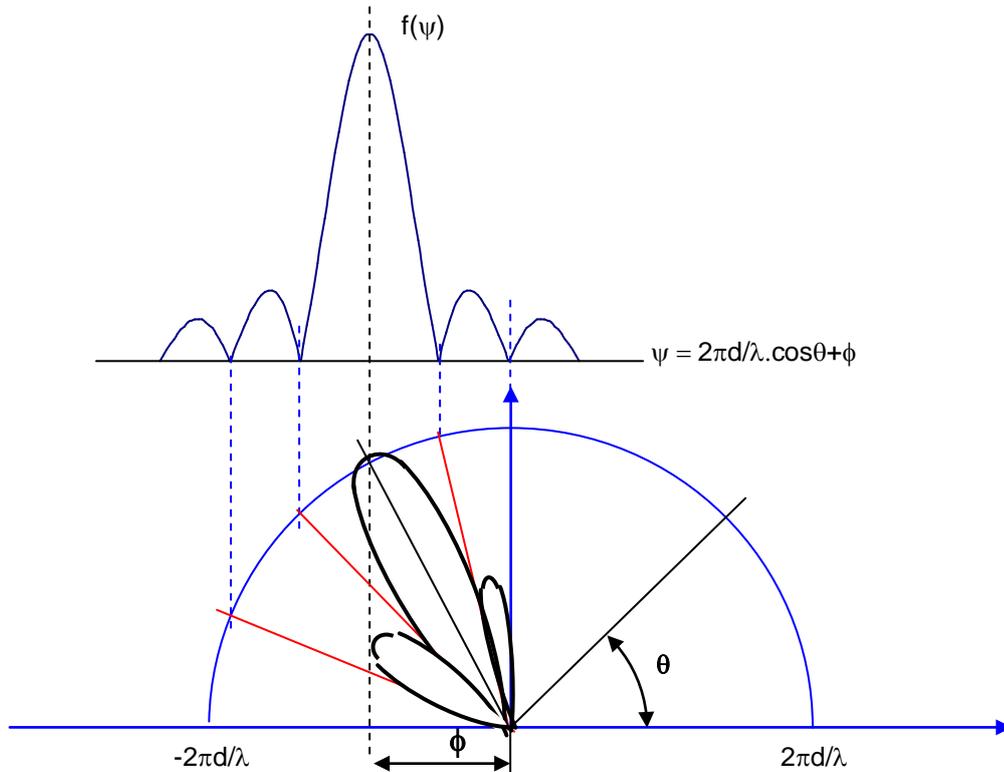
$$n = 4 ; \psi = \pm \frac{\pi}{2}$$

etc.....

Par ailleurs, nous savons que ψ est une fonction de θ et ϕ :

$$\psi = \frac{2\pi d}{\lambda} \cos \theta + \phi$$

Cette remarque permet de tracer de façon simple le diagramme de rayonnement en champ de l'alignement connaissant d , λ et ϕ .



L'amplitude de la fonction caractéristique (*diagramme*) pour chaque valeur de θ , est celle de $f(\psi)$ pour la valeur de :

$$\psi = \frac{2\pi d}{\lambda} \cos \theta + \phi$$

relevée directement sur le diagramme $f(\psi)$, compte tenu du déphasage ϕ . En particulier, le diagramme présente **un maximum** (*lobe principal*) pour :

$$\psi = 0 = \frac{2\pi d}{\lambda} \cos \theta_o + \phi$$

$$\theta_o = \text{Arc cos} \frac{-\phi \lambda}{2\pi d}$$

direction du rayonnement maximum de l'alignement.

Pour $\phi = 0$, on obtient $\theta_o = \pi/2$, un alignement en phase rayonne donc suivant la direction de sa normale.

On peut noter que pour un déphasage ϕ , le dépointage du faisceau par rapport à la normale s'effectue dans le sens des phases décroissantes sur l'alignement.

En jouant sur le déphasage ϕ , on pourra donc commander la direction du maximum de rayonnement et réaliser un balayage électronique du faisceau.

5.3.2 Lobes de périodicité

La fonction caractéristique $f(\psi)$ présente un lobe principal pour toutes les valeurs de ψ :

$$\psi = 2.k.\pi \quad (\text{k entier, positif, négatif ou nul}).$$

La figure précédente montre qu'il peut, suivant les valeurs de d/λ et ϕ , y avoir plusieurs valeurs de θ_k répondant à cette condition, qui sont données par la relation :

$$2k\pi = \frac{2\pi d}{\lambda} \cos \theta_k + \phi$$

La direction θ_0 du faisceau impose le déphasage ϕ qui s'écrit :

$$\phi = -\frac{2\pi d}{\lambda} \cos \theta_0$$

on obtient ainsi la relation :

$$k = \frac{d}{\lambda} (\cos \theta_k - \cos \theta_0)$$

Les lobes principaux ainsi définis sont appelés *lobes de périodicité*, ils peuvent être très gênants, notamment pour les applications radar, où seule la direction θ_0 doit être éclairée avec une grande amplitude.

Pour que des lobes de périodicité ne puissent apparaître, il faut fixer le rapport d/λ de telle manière que seule la valeur $k = 0$ satisfasse la relation ci-avant ; on a alors :

$$\left| \frac{d}{\lambda} (\cos \theta - \cos \theta_0) \right| < 1$$

quel que soit θ , soit :

$$d < \frac{\lambda}{1 + \cos \theta_0}$$

Lorsque les sources sont toutes alimentées en phase ($\theta_0 = \pi/2$), cela impose $d/\lambda < 1$.

Plus le dépointage par rapport à cette direction origine sera important, plus le rapport d/λ devra être faible. A la limite, on est certain qu'aucun lobe de périodicité ne peut apparaître si :

$$d < \lambda/2$$

Cette condition peut poser des problèmes de réalisation, notamment dans le domaine des fréquences élevées (λ petit).

5.4 DIRECTIVITE D'UN ALIGNEMENT

5.4.1 Définition

Le diagramme de rayonnement d'un alignement est de révolution autour de l'axe OZ. Sa directivité peut donc être calculée par la relation (cf. paragraphe 3.2)

$$D(\theta) = \frac{2w(\theta)}{\int_0^\pi w(\theta) \sin(\theta) \cdot d\theta}$$

et comme $w(\theta) = K E^2(\theta) = K' f^2(\theta)$ (cf. paragraphe 2) :

$$D(\theta) = \frac{2 f(\theta)^2}{\int_0^\pi f(\theta)^2 \sin(\theta) \cdot d\theta}$$

Dans le cas particulier où toutes les sources sont alimentées avec des amplitudes et des phases égales :

$$f(\theta) = \frac{\sin\left[\frac{n}{2} \cdot \left(\frac{2\pi d}{\lambda}\right) \cos \theta\right]}{n \sin\left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2\pi d}{\lambda}\right) \cos \theta\right]}$$

On peut donc effectuer le changement de variable :

$$\frac{2\pi d}{\lambda} \cos \theta = \psi$$

et en remarquant que la fonction est paire, il vient, dans la direction du maximum de rayonnement de l'aérien pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\cos \theta = 0$: $f(\theta) = 1$ et :

$$D_{\max} = \frac{\frac{2\pi d}{\lambda}}{\int_0^{\frac{2\pi d}{\lambda}} \left(\frac{\sin\left(n \frac{\psi}{2}\right)}{n \sin\left(\frac{\psi}{2}\right)} \right)^2 d\psi}$$

5.4.2 Méthode de calcul

On peut choisir comme paramètre de calcul : $2\pi d/\lambda = u$.

L'expression de la directivité devient alors :

$$D_{\max} = \frac{u}{\int_0^u \left(\frac{\sin\left(n \frac{\psi}{2}\right)}{n \sin\left(\frac{\psi}{2}\right)} \right)^2 d\psi}$$

Par ailleurs :

$$f(\psi) = \frac{\sin\left(n \frac{\psi}{2}\right)}{n \sin\left(\frac{\psi}{2}\right)}$$

peut être calculée de manière récurrente en choisissant un groupement deux à deux des sources à partir d'un axe de symétrie et en partant de la fonction de directivité élémentaire pour 2 sources distantes de d , qui peut s'écrire :

$$f_2 = \frac{\sin\left(2 \frac{\psi}{2}\right)}{2 \cdot \sin\left(\frac{\psi}{2}\right)} = \cos \frac{\psi}{2}$$

soit, suivant l'alignement considéré :

pour 2 sources $f_2 = \cos \frac{\psi}{2}$

pour 3 sources $f_3 = \frac{1}{3} (1 + 2 \cos \psi)$

pour 4 sources $f_4 = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\psi}{2} + \cos \frac{3\psi}{2} \right)$

pour 5 sources $f_5 = \frac{1}{5} (1 + 2 \cos \psi + 2 \cos 2\psi)$

pour 6 sources $f_6 = \frac{1}{3} \left(\cos \frac{\psi}{2} + \cos \frac{3\psi}{2} + \cos \frac{5\psi}{2} \right)$

pour $n = 2k$ sources $f_{2k} = \frac{1}{k} \sum_0^{k-1} \cos (2p+1) \frac{\psi}{2}$

pour $n = 2k + 1$ sources $f_{2k+1} = \frac{1}{2k+1} \left(1 + 2 \sum_1^k \cos (p\psi) \right)$

Le calcul des intégrales est alors relativement aisé. Par exemple :

a Pour deux sources :

$$I_2 = \int_0^u \cos^2 \left(\frac{\psi}{2} \right) d\psi = \int_0^u \left(\frac{1 + \cos \psi}{2} \right) d\psi = \frac{1}{2} (u + \sin u)$$

$$D_2 = \frac{2}{1 + \frac{\sin u}{u}}$$

b Pour trois sources :

$$I_3 = \int_0^u \frac{1}{9} (1 + 2 \cos \psi)^2 d\psi = \frac{1}{9} \int_0^u (3 + 4 \cos \psi + 2 \cos 2\psi) d\psi$$

$$I_3 = \frac{1}{9} (3u + 4 \cdot \sin u + \sin(2u)) = \frac{u}{3} \left(1 + \frac{4}{3} \frac{\sin u}{u} + \frac{2}{3} \frac{\sin(2u)}{2u} \right)$$

$$D_3 = \frac{3}{1 + \frac{4}{3} \frac{\sin u}{u} + \frac{2}{3} \frac{\sin(2u)}{2u}}$$

c Pour quatre sources :

$$I_4 = \int_0^u \frac{1}{4} \left(\cos \left(\frac{\psi}{2} \right) + \cos \left(\frac{3\psi}{2} \right) \right)^2 d\psi = \frac{1}{4} \int_0^u \left(1 + \frac{3}{2} \cos \psi + \cos (2\psi) + \frac{1}{2} \cos (3\psi) \right) d\psi$$

$$I_4 = \frac{1}{4} \left(u + \frac{3}{2} \sin u + \frac{1}{2} \sin(2u) + \frac{1}{6} \sin(3u) \right)$$

$$I_4 = \frac{u}{4} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\sin u}{u} + \frac{\sin 2u}{2u} + \frac{1}{2} \frac{\sin 3u}{3u} \right)$$

$$D_4 = \frac{4}{1 + \frac{3}{2} \frac{\sin u}{u} + \frac{\sin(2u)}{2u} + \frac{1}{2} \frac{\sin(3u)}{3u}}$$

d en général :

$$D_n = \frac{n}{1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2 \cdot (n-k)}{n} \frac{\sin(ku)}{ku}}$$

5.4.3 Interprétation des résultats

On remarquera que lorsque d/λ tend vers zéro, D_{\max} tend vers 1 quel que soit n (fini), car alors l'ensemble des sources a tendance à se comporter comme une source isotrope unique.

En principe, la directivité ne peut être supérieure au nombre de sources de l'alignement, comme le montrent les raisonnements suivants :

a A l'émission :

Parce que si W_T est la puissance totale fournie, chaque source reçoit la puissance W_T/n . Chaque source considérée comme seule rayonnera donc un champ $E_0/(n)^{1/2}$, si E_0 est le champ rayonné par une source recevant toute la puissance.

La région de gain maximum correspondant à une sommation en phase des champs rayonnés, le champ total est donc au maximum égal à $n \cdot E_0/(n)^{1/2} = (n)^{1/2} E_0$, ce qui correspond au champ émis par une source unique ayant reçu la puissance $n \cdot W_T$, d'où le gain $G_{\max} = n$.

b A la réception :

Chaque source baignée dans une onde plane collecte une onde caractérisée, par exemple, par son champ électrique E_r et sa puissance W_r . Prenons deux sources au hasard, pour faire la somme des ondes en provenance de ces deux sources, on peut utiliser un T magique, dans ces conditions :

- sur la voie somme, on aura un champ : $E_{\Sigma} = 1/\sqrt{2}(E_{r1} + E_{r2})$
- sur la voie différence, $E_{\Delta} = 1/\sqrt{2}(E_{r1} - E_{r2})$, de telle manière que la somme des puissances recueillies soit égale à la somme des puissances incidentes.

Donc, au mieux, si les sources sont identiques, et les ondes en phase, la puissance recueillie sur la voie somme sera : $W_{\Sigma} = 2W_r$, celle de la voie différence étant nulle, car $E_{r1} = E_{r2} = E_r$.

On peut donc généraliser pour n sources, et poser sans conditions particulières « à priori » sur l'écartement des sources. :

$$W_{\max} = n W_r \quad \text{soit} \quad G_{\max} = n$$

Néanmoins, ces raisonnements simples supposent que le comportement d'une source dans le réseau est le même que lorsqu'elle est isolée dans l'espace du point de vue rapport puissance-champ électrique, ce qui peut être mis en doute car dans le réseau seul le champ résultant, somme géométrique des champs élémentaires produits par chaque source, est rayonné et fournit de la puissance.

La directivité s'éloigne assez peu de n , sauf si $d \rightarrow 0$ ($D \rightarrow 1$), en particulier, l'affinement du lobe principal, lorsque les sources s'écartent, n'est pas accompagné d'un accroissement de directivité, cet effet étant compensé par l'apparition des lobes de périodicité.

En pratique, l'écartement des sources est de l'ordre de 0,5 à 0,7 λ , et la directivité reste toujours assez proche de n.

5.5 CAS LIMITE – ALIGNEMENT D'UN GRAND NOMBRE DE SOURCES

Considérons un *réseau de longueur finie* comportant un très grand nombre de sources. Il est caractérisé par sa directivité maximale et sa fonction de directivité :

$$D_{\max} = \frac{\frac{2\pi d}{\lambda}}{\int_0^{\frac{2\pi d}{\lambda}} \left(\frac{\sin(n\frac{\psi}{2})}{n \cdot \sin(\frac{\psi}{2})} \right) d\psi} \quad \text{et} \quad D = D_{\max} \left(\frac{\sin(n\frac{\psi}{2})}{n \cdot \sin(\frac{\psi}{2})} \right)^2$$

La longueur L du réseau est telle que : $nd = L$, donc comme :

$$\frac{n\psi}{2} = \frac{n}{2} \cdot \frac{2\pi d}{\lambda} \cos \theta$$

$$\frac{n\psi}{2} = \frac{\pi L}{\lambda} \cos \theta$$

$n\psi/2$ que nous poserons égal à x reste fini quand n croît, par contre x/n tend vers zéro, ce qui permet d'écrire, si $nd = L \gg \lambda$:

$$D_{\max} = \frac{\frac{2\pi d}{\lambda} \cdot \frac{n}{2}}{\int_0^{\frac{n2\pi d}{2\lambda}} \left[\frac{\sin x}{n \sin \frac{x}{n}} \right]^2 dx} \cong \frac{\frac{\pi \cdot L}{\lambda}}{\int_0^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx}$$

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx = \frac{\pi}{2}$$

$$D_{\max} = \frac{2L}{\lambda}$$

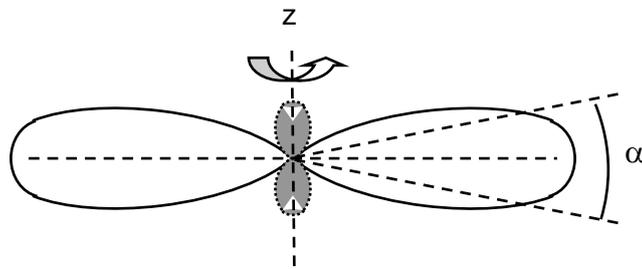
$$D = \frac{2 \cdot L}{\lambda} \left(\frac{\sin \left(\frac{\pi \cdot L}{\lambda} \cos \theta \right)}{\frac{\pi \cdot L}{\lambda} \cos \theta} \right)^2$$

On remarquera que pour $d = \lambda/2$, $L = nd$, $D_{\max} = 2nd/\lambda = n$ ce qui est le résultat trouvé en 5.4.1 et admettons le *domaine de validité* des relations précédentes :

$$0,3 < \frac{d}{\lambda} < 0,7$$

On peut également tenter de lier cette directivité maximale à une forme géométrique simple de lobe d'aérien, en effet, le diagramme obtenu est de révolution autour de OZ, et a, environ, la forme donnée sur le schéma ci-après :

LES ANTENNES



et référer la directivité à la direction du rayonnement maximum ce qui donne :

$$D = \frac{2 \cdot L}{\lambda} \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi \cdot L}{\lambda} \sin \alpha\right)}{\frac{\pi \cdot L}{\lambda} \sin \alpha} \right)^2$$

Les premiers zéro de la directivité D sont rencontrés pour

$$\frac{\pi L}{\lambda} \sin \alpha = \pi ; \text{ soit : } \sin \alpha = \alpha = \frac{\lambda}{L}$$

On peut alors considérer que la puissance est pratiquement toute focalisée dans l'angle α , proche de l'ouverture à « 3 dB » du lobe principal. Soit comme : $D_{\max} = 2 \cdot L/\lambda$:

$$\alpha \cong \frac{\lambda}{L} \text{ et } D = \frac{2}{\alpha}$$

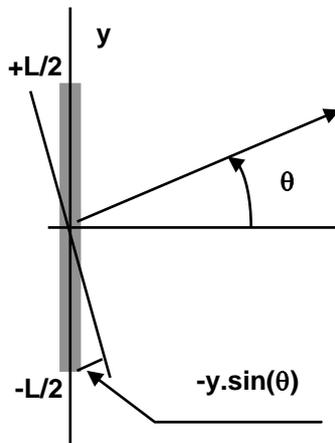
Ce qui revient à dire, que l'alignement se comporte en première approximation comme une antenne idéale, focalisant la puissance dans l'angle solide $\Omega = 2 \pi \alpha$, sa directivité étant :

$$D = \frac{4\pi}{\Omega} = \frac{4\pi}{2\pi\alpha} = \frac{2}{\alpha}$$

Cette règle simple n'est évidemment valable que s'il n'existe pas de lobes de périodicité.

Nota :

On peut directement retrouver le même résultat en considérant une ligne rayonnante de longueur L , dont chaque élément dz se comporte comme une source élémentaire. Le champ émis par un quelconque élément dz est (cf. paragraphe 5.3) :



$$dE = \frac{A(z, \theta) dz}{r_o} e^{(-j\beta \cdot r(z) + j\phi(z))}$$

avec $r(z) = r_o - z \cdot \cos \theta$, et $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$

Le champ global rayonné dans la direction θ aura alors pour expression :

$$E_\theta = \int_{-L/2}^{L/2} a(z) e^{j(\beta z \cdot \cos \theta)} dz$$

si :

$$a(z) = \frac{A(z)}{r_o} \cdot e^{-j\beta \cdot r_o} \cdot e^{j\phi(z)}$$

ou en passant à la limite, comme $a(z) = 0$ pour $|z| > L/2$:

$$E(\beta \cdot \cos \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(z) \cdot e^{jz \cdot (\beta \cdot \cos \theta)} dz$$

$E(\beta \cdot \cos \theta)$ est, à un coefficient près, la transformée de Fourier de $a(z)$. En particulier, si $a(z) = \text{cte}$, on trouve bien la relation :

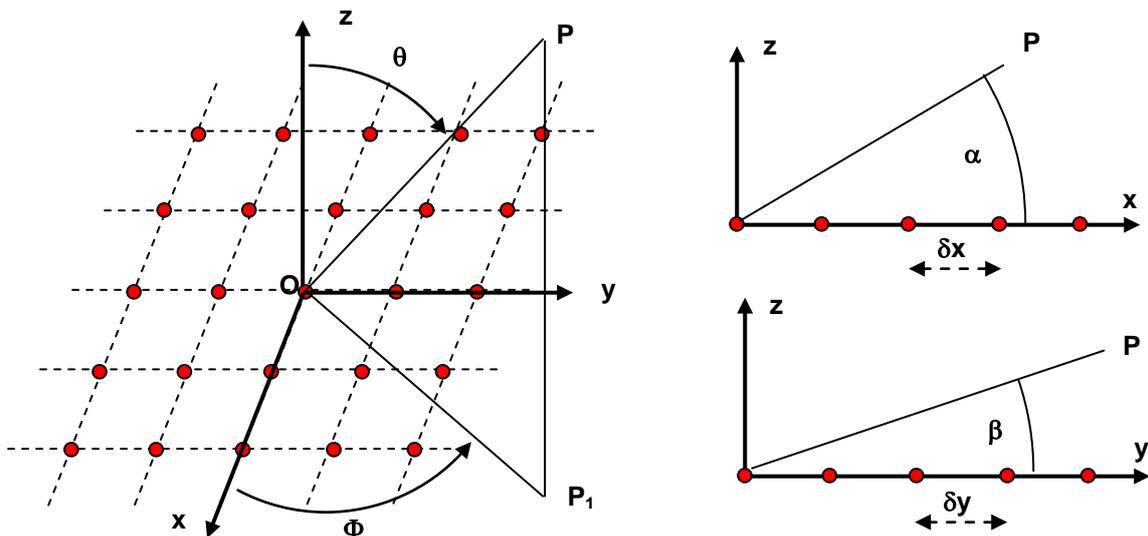
$$E(\beta \cdot \cos \theta) = K \cdot \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi \cdot L}{\lambda} \cdot \cos \theta\right)}{\frac{\pi \cdot L}{\lambda} \cdot \cos \theta} \right)$$

Cette méthode est très utilisée pour l'étude des alignements à très grand nombre de sources.

5.6 RÉSEAUX PLANS DE SOURCES D'AMPLITUDES IDENTIQUES

Un réseau est formé par un ensemble de sources disposées de manière régulière dans le plan XOY, suivant n lignes, parallèles à OX, et m colonnes parallèles à OY.

Suivant OX, les sources sont écartées de Δy et déphasées de ϕ_x . Suivant OY les sources sont écartées de Δx et déphasées de ϕ_y .



Le réseau ainsi formé peut être considéré comme l'alignement suivant OY, de sources équivalentes à l'alignement suivant OX. On peut donc obtenir la fonction de directivité globale de l'ensemble $F(\theta, \Phi)$ en appliquant le théorème de multiplication des fonctions caractéristiques. soit

$$F(\theta, \phi) = f_{oy}(\theta, \phi) \cdot f_{ox}(\theta, \phi),$$

avec :

$$f_{oy}(\theta, \phi) = \frac{\sin(m\psi_y / 2)}{m \cdot \sin(\psi_y / 2)} \quad ; \text{ et : } \psi_y = \frac{2\pi\Delta y}{\lambda} \cdot \cos \beta + \phi_y$$

$$f_{ox}(\theta, \phi) = \frac{\sin(m\psi_x / 2)}{m \cdot \sin(\psi_x / 2)} \quad ; \text{ et : } \psi_x = \frac{2\pi\Delta x}{\lambda} \cdot \cos \beta + \phi_x$$

Reportons-nous au système d'axes :

$$\alpha = (\text{OX.OP})$$

$$\cos(\text{OP}_1.\text{OP}) = \sin \theta$$

$$\cos(\text{Ox.OP}_1) = \cos \Phi$$

d'où :

$$\cos \alpha = \cos(\text{OX.OP}) = \sin \theta \cos \Phi$$

de même :

$$\cos \beta = \cos(\text{OY.OP}) = \sin \theta \sin \Phi$$

D'où la fonction caractéristique du réseau plan :

$$F(\theta, \phi) = \frac{\sin \frac{n}{2} \left(\frac{2\pi\Delta x}{\lambda} \sin \theta \cdot \cos(\phi + \phi_x) \right) \sin \frac{m}{2} \left(\frac{2\pi\Delta y}{\lambda} \sin \theta \cdot \cos(\phi + \phi_y) \right)}{n \cdot \sin \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi\Delta x}{\lambda} \sin \theta \cdot \cos(\phi + \phi_x) \right) m \cdot \sin \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi\Delta y}{\lambda} \sin \theta \cdot \cos(\phi + \phi_y) \right)}$$

Le lobe principal du réseau est obtenu pour ψ_x et ψ_y nul. Soit pour :

$$\cos \alpha_o = -\frac{\phi_x \lambda}{2\pi\Delta x} \quad \text{et :} \quad \cos \beta_o = -\frac{\phi_y \lambda}{2\pi\Delta y}$$

ces deux angles étant liés par la relation :

$$\sin^2(\theta_o) = \cos^2(\alpha_o) + \cos^2(\beta_o)$$

Ces deux équations définissent deux cônes de révolution, le premier autour de OX, le second autour de OY. Les directions des lobes principaux correspondent aux intersections de ces deux cônes. En particulier pour $\phi_x = \phi_y = 0$, les deux cônes se réduisent à des plans, et les lobes principaux correspondent aux directions positive et négative de l'axe OZ.

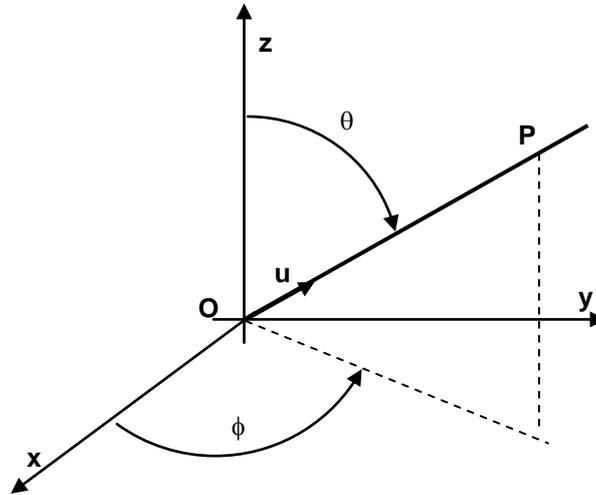
Par ailleurs, pour que des lobes de périodicité ne puissent apparaître, il faut et il suffit, qu'aucun lobe de périodicité n'apparaisse sur les alignements suivant OX et OY.

La condition exprimée en 5.3 devient alors :

$$\Delta x < \frac{\lambda}{1 + \cos \alpha_0} \text{ et } \Delta y < \frac{\lambda}{1 + \cos \beta_0}$$

5.7 NOTIONS SUR LES RÉSEAUX RÉFLECTEURS

Pour modifier le rayonnement du réseau précédent, on peut placer parallèlement au premier un réseau identique, décalé suivant OZ de la distance Δz . La fonction caractéristique suivant OZ, de cet alignement de deux éléments, s'écrira alors :



$$f_{oz}(\theta, \phi) = \frac{\sin \psi_z}{2 \sin \frac{\psi_z}{2}} = \cos \frac{\psi_z}{2}$$

avec :

$$\psi_z = \frac{2\pi\Delta z}{\lambda} \cos(\text{Oz} \cdot \text{OP}) + \phi_z$$

et comme :

$$(\text{Oz} \cdot \text{OP}) = \theta$$

$$\psi_z = \frac{2\pi\Delta z}{\lambda} \cos \theta + \phi_z$$

est indépendant de l'angle ϕ

$$f_{oz}(\theta, \phi) = \cos \left(\frac{\pi\Delta z}{\lambda} \cos \theta + \frac{\phi_z}{2} \right) = f_{oz}(\theta)$$

Si on désire à l'aide du second réseau, orienter autant que possible le rayonnement dans le demi-plan des Z positifs, il faut en particulier :

$$f_{oz}(\pi) = 0$$

soit :

$$-\frac{\pi \Delta z}{\lambda} + \frac{\phi_z}{2} = (2k + 1) \frac{\pi}{2}$$

Une des solutions possibles est pour $k = 0$:

$$\Delta z = -\frac{\lambda}{4} \text{ et } \phi_z = \frac{\pi}{2}$$

(déphasage de $\pi/2$ du réseau situé du côté des z négatifs). L'expression devient alors :

$$f_{oz}(\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{4}(\cos(\theta) - 1)\right)$$

La direction $\theta = 0$ est la direction de maximum de rayonnement, le gain de l'alignement correspondant est alors égal à 2. Le rayonnement est donc concentré du côté de l'axe OZ positif, le réseau situé derrière se comportant comme un réflecteur.

Il existe d'autres couples de valeur Δz , ϕ_z qui donnent un effet réflecteur, néanmoins celui choisi ci-dessus présente un intérêt particulier, car il n'est pas nécessaire d'alimenter le deuxième réseau, si celui-ci se comporte comme un court-circuit.

En effet, le réseau principal produit sur le second réseau une onde déphasée du temps de parcours soit : $-\pi/2$; l'onde induite résultante, en opposition de phase avec l'onde incidente (loi de LENZ), est alors déphasée de $+\pi/2$.

Le calcul n'est pas tout à fait exact car l'amplitude de l'onde induite est alors inférieure à celle de l'onde reçue. Néanmoins, l'effet global est pratiquement le même que lorsque le réseau réflecteur est alimenté.

REMARQUE :

Un réseau de sources d'amplitudes et de phases identiques, muni de son réflecteur, focalise la puissance (*en première approximation selon 5.5*) dans un angle solide faible $d\Omega$.

On peut alors écrire :

$$d\Omega \cong d\alpha \cdot d\beta$$

avec :

$$d\alpha \cong \frac{\lambda}{L_x} \text{ et } d\beta \cong \frac{\lambda}{L_y}$$

où L_x et L_y sont les dimensions du réseau.

La directivité d'un tel réseau s'écrira donc :

$$D = \frac{4\pi}{d\Omega} = 4\pi \cdot \frac{L_x \cdot L_y}{\lambda^2} = \frac{4\pi S}{\lambda^2}$$

S étant la surface du réseau. Nous retrouverons cette expression dans d'autres cas d'antennes.

5.8 RÉSEAUX DE SOURCES D'AMPLITUDES DIFFÉRENTES

Les réseaux de sources d'amplitudes égales permettent d'obtenir le maximum de gain à nombre de sources, ou surface, donné. Par contre, les lobes secondaires ont un niveau relativement élevé (13 dB sous le lobe principal pour le premier lobe secondaire si n grand).

Il n'est pas souhaitable en radar de tolérer des lobes secondaires d'un tel niveau. Pour réduire les lobes secondaires, on fait décroître symétriquement l'amplitude du champ rayonné du centre de l'alignement vers ses extrémités.

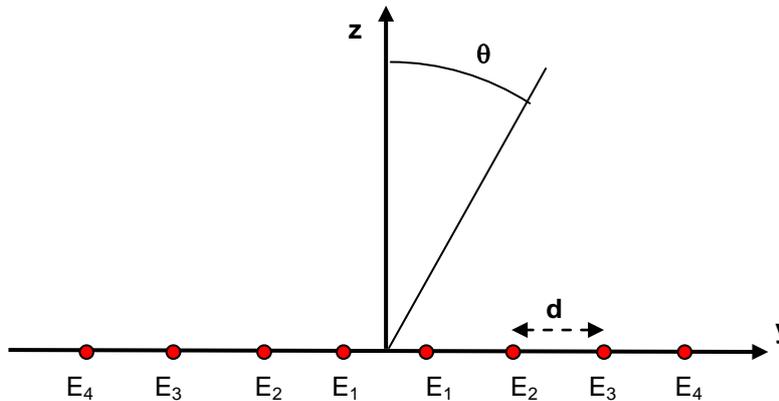
Dans de nombreux cas, on ramène l'étude d'un réseau à celui de son rayonnement dans les plans des alignements principaux. Nous limiterons donc notre examen à celui des alignements.

Soient $E_1, E_2 \dots E_p$ l'amplitude de chacune des sources en partant du centre. Dans le cas où le nombre des sources est impair, l'amplitude de la source centrale sera prise égale à $2.E_1$. On prend comme référence le centre de l'alignement et on pose :

$$\psi = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta$$

On peut alors calculer le champ électrique global produit par l'ensemble des sources. Ceci est fait en regroupant d'abord deux à deux les sources de même rang, soit :

pour N pair :



$$e_n = E_n \left[\exp \left\{ j \frac{2\pi(2n-1)}{\lambda} \frac{d}{2} \sin \theta \right\} + \exp \left\{ -j \frac{2\pi(2n-1)}{\lambda} \frac{d}{2} \sin \theta \right\} \right]$$

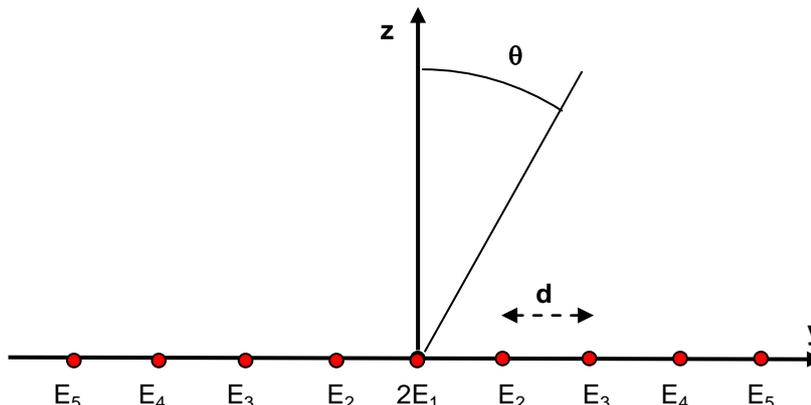
$$e_n = E_n \left[\exp \left\{ j(2n-1) \frac{\psi}{2} \right\} + \exp \left\{ -j(2n-1) \frac{\psi}{2} \right\} \right]$$

$$= 2 E_n \cos(2n-1) \frac{\psi}{2}$$

Si $N = 2.n$ est le nombre total de sources, on obtient en sommant les θ_n :

$$E = 2 \left[E_1 \cos \frac{\psi}{2} + E_2 \cos \left(3 \frac{\psi}{2} \right) + E_3 \cos \left(5 \frac{\psi}{2} \right) + \dots + E_{\frac{N}{2}} \cos \left((N-1) \frac{\psi}{2} \right) \right]$$

pour N impair :



$$e_n = E_n \left[\exp \left\{ \frac{j2\pi}{\lambda} (n-1) \cdot d \cdot \sin \theta \right\} + \exp \left\{ -\frac{j2\pi}{\lambda} (n-1) \cdot d \cdot \sin \theta \right\} \right]$$

$$e_n = E_n \left[\exp \{ j(n-1) \psi \} + \exp \{ -j(n-1) \psi \} \right] = 2 E_n \cos (n-1) \psi$$

Soit si $N = 2n + 1$ est le nombre total de sources, on obtient :

$$E = 2 \left[E_1 + E_2 \cos \left(2 \frac{\psi}{2} \right) + E_3 \cos \left(4 \frac{\psi}{2} \right) + \dots + E_{\frac{N-1}{2}} \cos \left((N-1) \frac{\psi}{2} \right) \right]$$

Dans les deux cas, le champ résultant est la somme de termes de la forme :

$$\cos \left(m \frac{\psi}{2} \right)$$

Expression qui peut s'exprimer en fonction d'une somme de termes de la forme :

$$\cos \left(m \frac{\psi}{2} \right) = \sum a_p \left(\cos \frac{\psi}{2} \right)^p$$

qui sont des polynômes de *Tchebycheff* ; obtenus en posant :

$$\cos \frac{\psi}{2} = x \text{ et : } \cos \left(m \frac{\psi}{2} \right) = T_m(x)$$

Exemple :

$$m = 0 , \quad \cos \left(0 \frac{\psi}{2} \right) = 1 = T_0(x)$$

$$m = 1 , \quad \cos \left(\frac{\psi}{2} \right) = x = T_1(x)$$

$$m = 2 , \quad \cos \left(2 \frac{\psi}{2} \right) = \cos \psi = 2 \cos^2 \left(\frac{\psi}{2} \right) - 1 = 2x^2 - 1 = T_2(x)$$

$$m = 3 , \quad \cos \left(3 \frac{\psi}{2} \right) = 4 \cos^3 \left(\frac{\psi}{2} \right) - 3 \cos \left(\frac{\psi}{2} \right) = 4x^3 - 3x = T_3(x)$$

$$m = p , \quad \cos \left(p \frac{\psi}{2} \right) = \dots = T_p(x)$$

Les expressions du champ E rayonné deviennent :

pour N pair :

$$E = 2 \left[E_1 T_1(x) + E_2 T_3(x) + E_3 T_5(x) + \dots + E_{\frac{N}{2}} T_{N-1}(x) \right]$$

pour N impair :

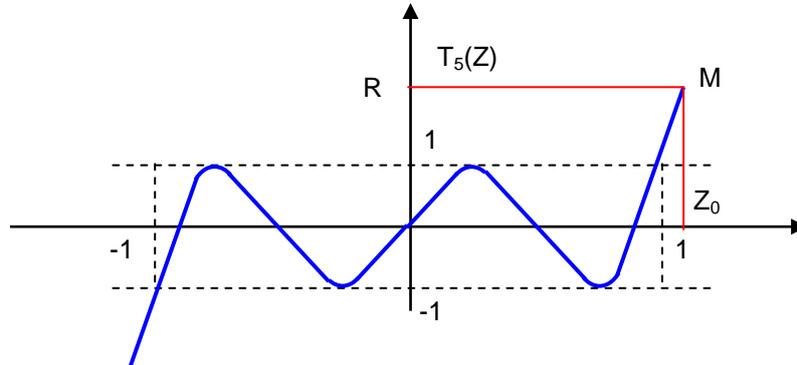
$$E = 2 \left[E_1 T_0(x) + E_2 T_2(x) + E_3 T_4(x) + \dots + E_{\frac{N-1}{2}} T_{N-1}(x) \right]$$

Par conséquent, les champs peuvent être exprimés par des polynômes algébriques de degrés $(N - 1)$ de la variable : $x = \cos(\psi/2)$.

5.8.1 Optimisation – méthode de Dolph - Tchebycheff

Le problème posé consiste, à niveau relatif de lobes secondaires donné, à obtenir le maximum de gain d'alignement, ce qui correspond en général à une ouverture faible du lobe principal.

On peut démontrer que cette condition est remplie lorsque les niveaux maximaux des lobes secondaires sont tous égaux. Or, les polynômes de *Tchebycheff*, dans l'intervalle -1 à $+1$ de la variable, possèdent la propriété de rester compris entre $+1$ et -1 comme le montre la figure page suivante.



Il suffit donc de poser par exemple que le champ total :

$$E = E_1 T_1(x) + E_2 T_3(x) + \dots + E_{n/2} T_{N-1}(x) = T_{N-1}(Z)$$

est un polynôme de *Tchebycheff* de degré $N - 1$ de la variable Z . La méthode utilisée (méthode de *Dolph*) consiste alors à :

- choisir une valeur Z_0 maximale de Z de telle manière que :

$$T_{N-1}(Z_0) = R$$

- s'arranger pour qu'à cette valeur Z_0 de Z corresponde la direction du lobe principal de l'aérien.

Dans ces conditions, le rapport entre le niveau du lobe principal et celui des lobes secondaires est en champ égal à R , donc en puissance à R^2 . Ceci, à condition que dans le domaine total de variation de ψ , $x = \cos \psi / 2$ et $Z = f(x)$ restent tels que Z varie entre -1 et Z_0 .

Sans rentrer dans le détail des justifications, posons dans le cas particulier où toutes les sources sont alimentées en phase :

$$x = \cos \frac{\psi}{2} = \cos \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta,$$

$$Z = Z_0 x$$

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi d}{\lambda} < \frac{\psi}{2} < \frac{\pi d}{\lambda}$$

et dès que $d/\lambda < 1$, ce qui correspond, dans ce cas, à la non apparition de lobes de périodicité :

$$\cos \frac{\pi d}{\lambda} < x < 1$$

$$Z_0 \cos \frac{\pi d}{\lambda} < Z < Z_0$$

Pour que les lobes secondaires restent tous égaux à 1, il suffit que :

$$-1 < Z, \text{ donc ; } -\frac{1}{Z_0} < \cos \frac{\pi d}{\lambda}$$

ce qui précise la condition de non apparition de lobes de périodicité.

Z_0 et d étant choisis, on pourra obtenir la valeur des coefficients $E_1, E_2, E_{N/2}$, en résolvant l'équation :

$$E_1 T_1(x) + E_2 T_3(x) + \dots + E_{n/2} T_{N-1}(x) = T_{N-1}(Z_0 x)$$

Le résultat est obtenu en identifiant terme à terme les deux membres de l'équation, on obtiendra ainsi un système de $N/2$ équations à $N/2$ inconnues constituées par les amplitudes $E_1, E_2, \dots, E_{N/2}$ des alimentations des sources.

Par exemple, pour un réseau à 8 éléments, et en choisissant R égal à 26 dB, on trouve que Z_0 est égal à 1,15 et que les courants d'alimentation des éléments sont proportionnels aux nombres suivants :

$$1 \quad 1,7 \quad 2,6 \quad 3,1 \quad 3,1 \quad 2,6 \quad 1,7 \quad 1$$

On voit donc que les courants des éléments centraux n'ont pas des valeurs exagérées par rapport à ceux des éléments marginaux.

On constate aussi que l'élargissement du lobe principal, par rapport à celui qui correspond à la répartition uniforme, est relativement faible. Le « *facteur d'élargissement* » ainsi défini, ne dépend que du niveau des lobes latéraux.

Il est approximativement égal à :

- 1,05 pour des lobes latéraux à -20 dB
- 1,15 pour des lobes latéraux à -30 dB
- 1,30 pour des lobes latéraux à -40 dB
- 1,50 pour des lobes latéraux à -50 dB

Par contre, la directivité maximale d'un tel réseau est, quel que soit le nombre de sources utilisées, limitée par la valeur R (rapport entre lobe principal et lobes secondaires). On démontre que, quel que soit n :

$$D_{\max} \leq 2.R^2$$

Pour éviter cet inconvénient, on peut remplacer les polynômes de *Dolph-Tchebycheff* par une distribution de *Taylor* qui conduit à des diagrammes pour lesquels, à part les plus proches, les lobes secondaires décroissent régulièrement.

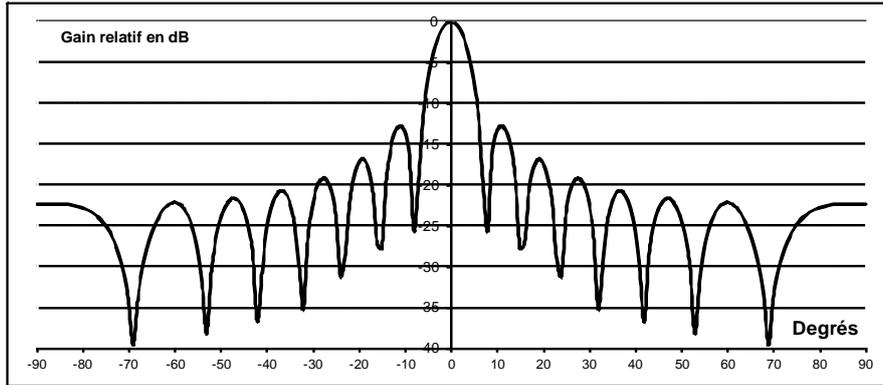
5.8.2 Autres lois : Exemples

Pratiquement, la méthode devient très complexe dès que le nombre de sources est élevé (*par exemple : pour 50 sources, il faudrait résoudre 25 équations à 25 inconnues*), ce qui est souvent le cas. Aussi, lorsque le nombre de sources est élevé, on considère la répartition de champ le long de l'alignement comme une répartition continue (cf. paragraphe 5.5) et l'on est reporté au cas classique traité pour les ouvertures planes.

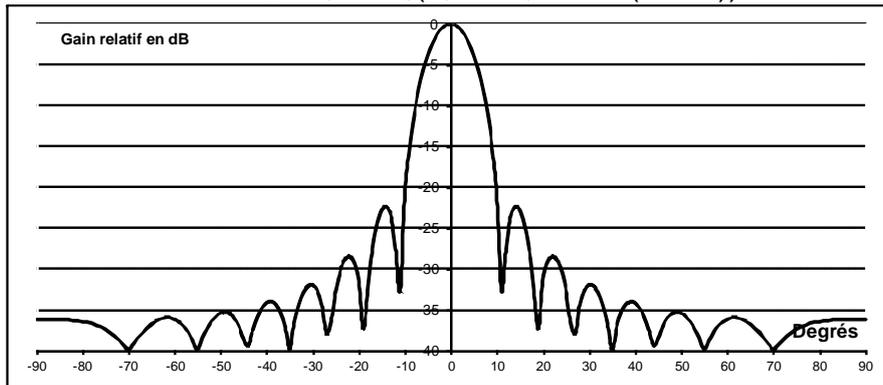
Les graphiques page suivante présentent les courbes de gain d'un réseau de 14 sources pour différentes loi de répartition de la puissance W sur les sources.

LES ANTENNES

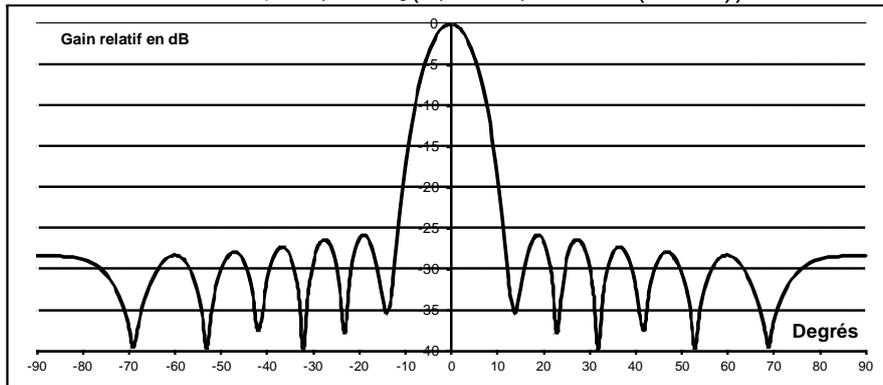
loi uniforme : $w_i = W/15 = w_0$



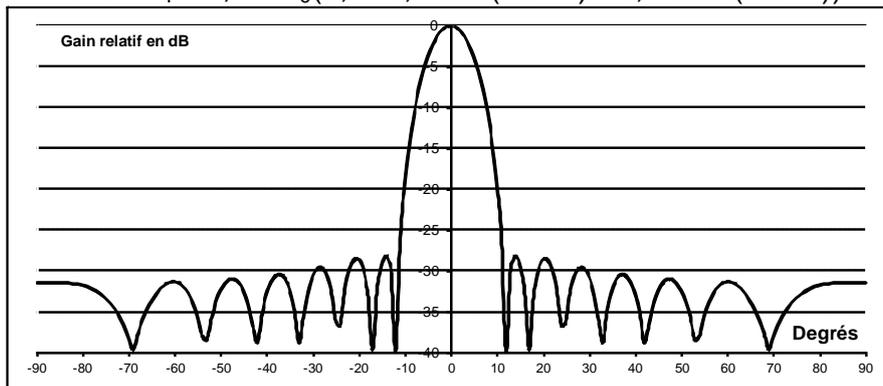
loi 1 : $w_i = 1,96 w_0(0,15 + 0,85 \cdot \cos(i \cdot \pi/14))$



loi 2 : $w_i = 2,30 w_0(0,25 + 0,75 \cdot \cos^2(i \cdot \pi/14))$



loi 3 : $w_i = 2,14 w_0(0,2 + 0,4 \cdot \cos(i \cdot \pi/14) + 0,4 \cdot \cos^2(i \cdot \pi/14))$



6 RAYONNEMENT DES OUVERTURES

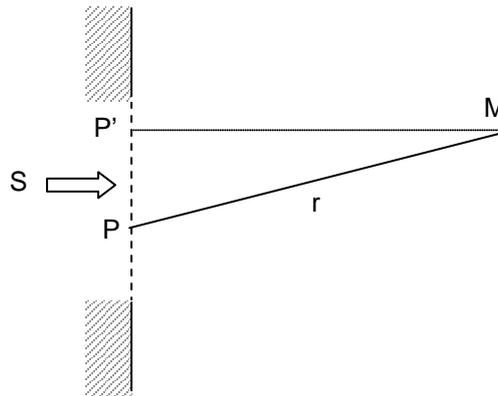
6.1 FORMULES GÉNÉRALES

Dans le domaine radar, on utilise fréquemment des antennes composées d'un réflecteur illuminé par une source primaire ; les réflecteurs sont constitués principalement par des paraboloïdes ou des cylindres paraboliques.

Le calcul du rayonnement de ces antennes peut s'effectuer en approximant la surface englobée dans le contour du réflecteur par une ouverture plane sur laquelle existe une répartition de champ, qui dépend du diagramme de la source primaire et de la forme du réflecteur.

Le rayonnement des ouvertures répond au *principe de Huygens* dont l'énoncé dans les grandes lignes est le suivant : chaque point P d'un front d'ondes S peut être considéré comme une source secondaire d'ondes sphériques. Les ondes issues de l'ensemble des points P de la surface S se combinent entre elles pour former un nouveau front d'ondes.

Par suite, le champ en un point quelconque M de l'espace, sera la somme vectorielle des champs des ondes issues des divers points P de la surface S .



Supposons que l'état électrique en P soit défini par un scalaire complexe $f(P)$, la contribution d'un petit élément ds entourant P se traduit en M par un champ électrique élémentaire tel que :

$$\left| \vec{dE}(M) \right| = K \cdot f(P) \frac{e^{-j\beta \cdot r}}{r} ds$$

- K est une constante
- $r = [PM]$
- $e^{-j\beta r}$ exprime le déphasage de l'onde le long du trajet PM
- $1/r$ exprime le fait que l'onde est sphérique (*puissance variant comme $1/r^2$*).

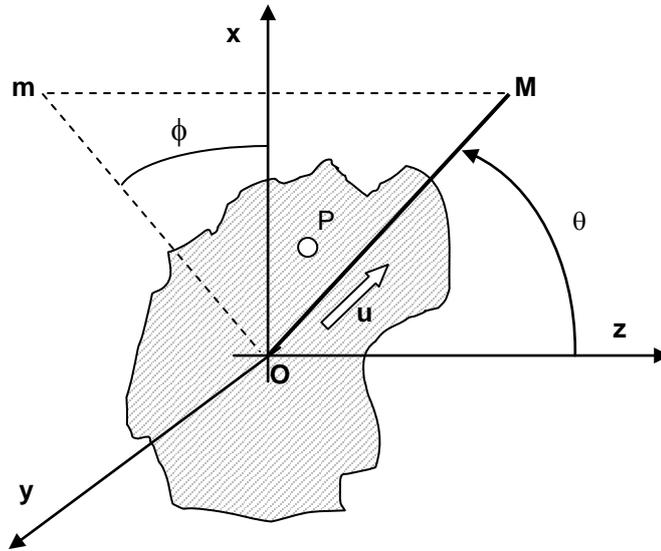
Pour obtenir le champ total au point M , il faut alors calculer l'intégrale :

$$\vec{E}(M) = \iint_S \vec{dE}(M) ds$$

Ce calcul a été fait dans le cas des ondes électromagnétiques pour aboutir aux *formules de Kottler*.

La forme simplifiée de cette relation dans le cas d'une ouverture plane contenant le champ électrique des ondes est :

$$\vec{E}(\vec{OM}) = \frac{e^{-j\beta R}}{\lambda R} \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right) \iint_S \vec{E}(\vec{OP}) e^{+j\beta \vec{OP} \cdot \vec{u}} ds$$



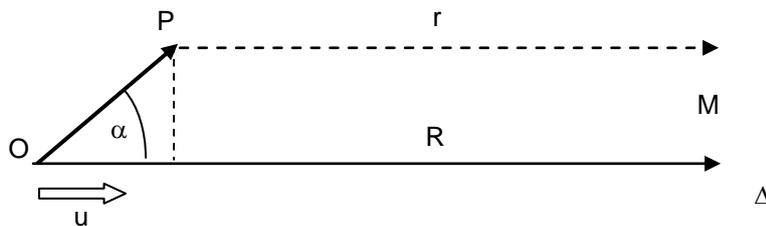
- $R = [OM]$,
- u : vecteur unitaire porté par OM ,
- $E(OP) = E(P)$: densité de champ au point P de la surface S

REMARQUES

Comme le montre la figure page suivante :

$$\vec{OP} \cdot \vec{u} = [\vec{OP}] \cdot \cos \alpha = R - r$$

est la différence de chemin entre l'onde issue de P et celle issue de O (à rapprocher des alignements).



Le champ en M est perpendiculaire à la direction OM donc n'a pas la même direction que $E(OP)$ dans la surface S . Ceci explique l'apparition du terme :

$$\frac{1 + \cos \theta}{2}$$

qui en quelque sorte, caractérise la directivité de la cellule élémentaire dS .

Ce facteur d'obliquité peut très souvent être assimilé à 1. En effet, pour :

$$\frac{1 + \cos \theta}{2} = 0,85 \text{ pour } \theta = \pm 45^\circ$$

$$\frac{1 + \cos \theta}{2} = 0,75 \text{ pour } \theta = \pm 60^\circ$$

Il est donc suffisant, pour des lobes étroits dont le maximum de rayonnement est proche de

l'axe OZ, de prendre aux petits angles :

$$\vec{E}(\vec{OM}) \cong \frac{e^{-j\beta R}}{\lambda R} \iint_s \vec{E}(\vec{OP}) e^{+j\beta \vec{OP} \cdot \vec{u}} ds$$

ou encore sa forme réduite, en faisant abstraction du terme $e^{-j\beta R}$ et en posant :

$$\rho = \frac{R}{\lambda} ; \vec{\mu} = \frac{\vec{OP}}{\lambda} ; d\sigma = \frac{dS}{\lambda^2}$$

$$\vec{E}(\vec{u}) = \frac{1}{\rho} \iint_{\sigma} \vec{E}(\vec{\mu}) e^{+j2\pi \vec{\mu} \cdot \vec{u}} d\sigma$$

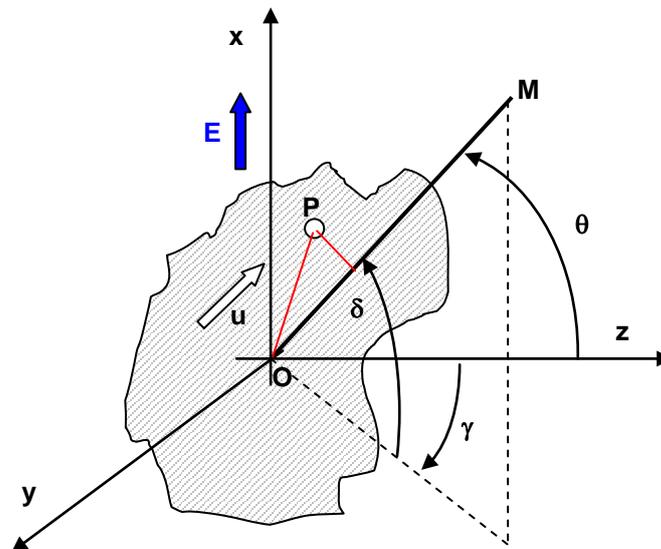
Pour la direction OZ, le déphasage dû au temps de parcours est constant. Les champs électriques issus de chaque point de l'ouverture conservent leurs phases relatives. En particulier, si les champs dans l'ouverture sont en phase, OZ est la direction du maximum de rayonnement de l'ouverture.

6.2 APPLICATION PRATIQUE DIAGRAMMES PRINCIPAUX D'UNE OUVERTURE PLANE

Dans de nombreux cas, on étudie le rayonnement des aériens dans deux plans principaux, qui sont, lorsque la polarisation de l'onde est linéaire, le plan du champ électrique E, et le plan perpendiculaire contenant le champ magnétique H.

Choisissons donc un système d'axes OXYZ tel que :

- XOY est le plan de l'ouverture, E est parallèle à ox,
- dans le plan XOZ, $\gamma = 0$ et la direction du rayonnement est $\delta = \theta$
- dans le plan YOZ, $\delta = 0$ et la direction du rayonnement est $\gamma = \theta$



Nous limiterons l'étude du rayonnement aux faibles valeurs de γ et δ , ce qui, dans le cas des antennes radar, représente la partie intéressante du diagramme. Le champ, dans une direction OM de l'espace, s'écrit:

$$E(\vec{OM}) = \frac{e^{-j\beta.R}}{\lambda.R} \iint_S E(\vec{OP}) \cdot e^{j\beta.\vec{OP} \cdot \vec{u}} ds$$

Avec :

$$\vec{OP} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ et } : \vec{u} = \begin{Bmatrix} \sin \delta \\ \cos \delta \cdot \sin \gamma \\ \cos \delta \cdot \cos \gamma \end{Bmatrix}$$

Ce qui permet d'écrire :

$$E(\vec{OP}) = E(x, y)$$

$$\vec{OP} \cdot \vec{u} = x \cdot \sin \delta + y \cdot \cos \delta \cdot \sin \gamma$$

$$E(\vec{OM}) = \frac{e^{-j\beta.R}}{\lambda.R} \iint_S E(x, y) \cdot e^{j\beta.(x \cdot \sin \delta + y \cdot \cos \delta \cdot \sin \gamma)} ds$$

Le diagramme de rayonnement dans le plan xOz , contenant le champ électrique (plan E), est donné par ($\gamma = 0$) :

$$E(\delta) = \frac{e^{-j\beta.R}}{\lambda R} \iint_S E(x, y) e^{j\beta x \cdot \sin \delta} dx \cdot dy$$

Le diagramme de rayonnement dans le plan yOz , contenant le champ magnétique (plan H), est donné par ($\delta = 0$) :

$$E(\gamma) = \frac{e^{-j\beta R}}{\lambda R} \iint_S E(x, y) e^{j\beta y \cdot \sin \gamma} dx \cdot dy$$

Les expressions $E(\delta)$ et $E(\gamma)$ ont la même forme et se rejoignent pour $\gamma = 0$ et $\delta = 0$, c'est-à-dire pour la direction de la normale à la surface, on a alors :

$$E(\vec{OZ}) = \frac{e^{-j\beta.R}}{\lambda R} \iint_S E(x, y) \cdot dx \cdot dy$$

pour cette direction OZ , le déphasage dû au temps de parcours est constant. Les champs électriques issus de chaque point de l'ouverture conservent leurs phases relatives. En particulier, si les champs dans l'ouverture sont en phase, OZ est la direction du maximum de rayonnement de l'ouverture.

6.3 GAIN D'UNE OUVERTURE PLANE

Le gain d'un aérien est donné par la relation générale :

$$G(\vec{OM}) = \frac{4\pi \cdot w(\vec{OM})}{W_T}$$

W_T est la puissance transmise à l'ouverture rayonnante, dont la densité par unité de surface s'écrit en chaque point P de cette surface :

$$\frac{dW_T}{ds} = \frac{[E(\vec{OP})]^2}{240\pi}$$

soit :

$$W_T = \iint_S \frac{[E(\vec{OP})]^2}{240\pi} ds$$

Par ailleurs, si $E(\vec{OM})$ est le champ rayonné dans la direction OM , la puissance rayonnée par unité d'angle solide, à la distance R de l'ouverture, s'écrit (cf. paragraphe 2) :

$$w(\vec{OM}) = \frac{R^2 [E(\vec{OM})]^2}{240\pi}$$

avec :

$$E(\vec{OM}) = \frac{e^{-j\beta R}}{\lambda R} \iint_S E(\vec{OP}) \cdot e^{j\beta \vec{OP} \cdot \vec{u}} ds$$

$$w(\vec{OM}) = \frac{1}{\lambda^2} \frac{[\iint_S E(\vec{OP}) \cdot e^{j\beta \vec{OP} \cdot \vec{u}} ds]^2}{240\pi}$$

d'où l'expression générale du gain :

$$G(\vec{OM}) = \frac{4\pi}{\lambda^2} \frac{[\iint_S E(\vec{OP}) \cdot e^{j\beta \vec{OP} \cdot \vec{u}} ds]^2}{\iint_S [E(\vec{OP})]^2 ds}$$

En particulier, dans le cas d'une *ouverture plane de surface S illuminée par un champ uniforme* E_0 le gain dans la direction du rayonnement maximum de l'aérien, s'écrira :

$$G(\vec{OZ}) = \frac{4\pi}{\lambda^2} \frac{[\iint_S E_0 \cdot dx \cdot dy]^2}{\iint_S [E_0]^2 dx \cdot dy} = \frac{4\pi}{\lambda^2} \iint_S dx \cdot dy$$

$$\boxed{G(\vec{OZ}) = \frac{4\pi S}{\lambda^2}}$$

On démontre que c'est la valeur maximale du gain que l'on peut obtenir avec une ouverture rayonnante de surface S .

Dans les cas courants, la répartition du champ sur l'ouverture n'est pas uniforme, le diagramme s'élargit et le gain diminue. Il peut alors s'écrire :

$$\boxed{G_{MAX} = \frac{4\pi S}{\lambda^2} \cdot f}$$

f est appelé facteur de gain, il est inférieur à 1 sauf dans le cas de la loi d'illumination uniforme, c'est-à-dire équiamplitude et équiphase.

Si le champ n'est plus équiphase, le maximum de rayonnement n'est plus dans la direction de la normale au plan XOY , mais dans une direction qui dépend de la loi de phase adoptée.

6.4 SURFACE EFFECTIVE D'UNE OUVERTURE PLANE

Une ouverture à éclairage uniforme réparti dans l'espace, la totalité de la puissance W_T qui lui est fournie. Réciproquement, si cette ouverture reçoit, de la direction OZ , une onde engendrant sur sa surface un champ uniforme, elle recueillera la puissance totale W_R qu'elle interceptera, soit :

$$W_R = S \cdot dw(\vec{OZ})$$

Ceci est le cas lorsque M est très éloigné de O et lorsque OZ est dirigé vers M .

La surface effective d'une ouverture plane à loi d'éclairage uniforme est dans la direction OZ du rayonnement maximum :

$$A = \frac{W_R}{dw(\vec{OZ})} = S = \frac{G \cdot \lambda^2}{4\pi}$$

Nous avons vu au paragraphe 4 que l'on pouvait écrire pour toute direction de l'espace :

$$\frac{A(\vec{OM})}{A_{MAX}} = \frac{G(\vec{OM})}{G_{MAX}}$$

L'ensemble de ces deux relations permet de formuler la surface effective d'un aérien dans sa direction de rayonnement maximum :

$$A_{MAX} = \frac{G \lambda^2}{4\pi}$$

En particulier, la surface effective maximale d'un aérien quelconque de surface S s'écrira :

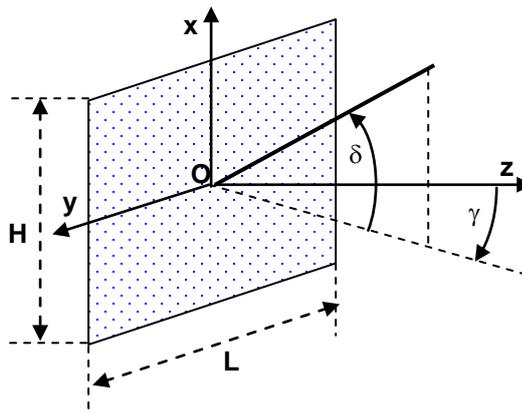
$$A = f S$$

Ceci permet de découvrir deux aspects du facteur f :

- rapport entre le gain de l'ouverture et celui d'une ouverture à éclairage uniforme de même surface ou : *facteur de gain de l'aérien* ;
- rapport entre la puissance interceptée par un aérien de surface S et celle qu'il est effectivement capable de recueillir : *rendement de l'aérien*.

6.5 OUVERTURE RECTANGULAIRE

Soit une ouverture rectangulaire de dimensions L et H sur laquelle la répartition de champ est de la forme :



$$E(x,y) = E_1(x) E_2(y)$$

ce qui est pratiquement toujours le cas.

Les expressions des champs rayonnés dans les plans XOZ et YOZ seront :

$$E(\gamma) = \frac{e^{-j\beta R}}{\lambda R} \iint_s E_1(x) E_2(y) e^{j\beta y \sin\gamma} dx dy$$

$$E(\delta) = \frac{e^{-j\beta R}}{\lambda R} \iint_s E_1(x) E_2(y) e^{j\beta x \sin\delta} dx dy$$

qui deviennent, puisque les variables se séparent :

$$E(\gamma) = \frac{e^{-j\beta R}}{\lambda R} \int_{-H/2}^{+H/2} E_1(x) dx \cdot \int_{-L/2}^{+L/2} E_2(y) \cdot e^{j\beta y \sin\gamma} dy$$

$$E(\delta) = \frac{e^{-j\beta R}}{\lambda R} \int_{-L/2}^{+L/2} E_2(y) dy \cdot \int_{-H/2}^{+H/2} E_1(x) e^{j\beta x \sin\delta} dx$$

soit :

$$E(\delta) = A_0 \int_{-H/2}^{+H/2} E_1(x) e^{j\beta x \sin\delta} dx$$

$$E(\gamma) = B_0 \int_{-L/2}^{+L/2} E_2(y) e^{j\beta y \sin\gamma} dy$$

A_0 et B_0 étant des constantes qui dépendent respectivement de $E_1(x)$ et $E_2(y)$. Ces deux intégrales ayant la même forme, prenons la première, en posant $A(x) = A_0 E_1(x)$:

$$E(\delta) = \int_{-H/2}^{+H/2} A(x) e^{j\beta x \sin\delta} dx$$

Or, le champ n'existe que dans l'intervalle $-H/2$ à $+H/2$, nous pouvons donc intégrer de $-\infty$ à $+\infty$ sans changer le résultat, l'intégrale étant nulle à l'extérieur de cet intervalle, soit :

$$E(\delta) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(x) e^{j\beta x \sin\delta} dx$$

Cette relation est celle d'une transformée de Fourier. En effet, les expressions de la transformée de Fourier et de la transformée inverse sont (cf. chapitre 8, paragraphe 6) :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) e^{2j\pi ft} dt, \text{ et inversement : } H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-2j\pi ft} dt$$

Choisissons comme variables :

$$x/\lambda \text{ et } \sin(\delta);$$

$$A(x) = 1/\lambda \cdot a(x/\lambda)$$

$$E(\delta) = f(\sin\delta)$$

$$\beta = 2\pi/\lambda$$

on a :

$$f(\sin \delta) = \int_{-\infty}^{+\infty} a\left(\frac{x}{\lambda}\right) e^{j2\pi \cdot \left(\frac{x}{\lambda}\right) (\sin \delta)} d\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

et réciproquement :

$$a\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\sin \delta) e^{-j2\pi \cdot \left(\frac{x}{\lambda}\right) (\sin \delta)} d(\sin \delta)$$

Donc $f(\sin \delta)$, qui représente le diagramme de rayonnement de l'ouverture, est la transformée de Fourier de la répartition de champ $a(x/\lambda)$ sur cette ouverture et réciproquement.

Il n'a été fait aucune supposition sur la forme de la loi $A(x)$, cette relation est donc tout à fait générale ; on pourra ainsi pour un diagramme déterminé trouver la loi de répartition de champ sur l'ouverture et réciproquement.

D'autre part, du fait de la propriété de linéarité des intégrales, si la loi de répartition sur l'ouverture est la somme de plusieurs lois, le diagramme global sera la somme des diagrammes élémentaires correspondants à chaque loi.

6.5.1 Cas où la loi de répartition est uniforme : $A(x) = cte = A_0$

$$E(\delta) = \int_{-H/2}^{+H/2} A_0 \cdot e^{j\beta x \sin \delta} dx$$

$$E(\delta) = \frac{A_0}{j\beta \sin \delta} \cdot \left[e^{j\beta \cdot x \cdot \sin \delta} \right]_{x=-H/2}^{x=+H/2} = \frac{A_0}{j\beta \sin \delta} \left[\exp\left\{ \frac{j\beta \cdot H \cdot \sin \delta}{2} \right\} - \exp\left\{ -\frac{j\beta \cdot H \cdot \sin \delta}{2} \right\} \right]$$

$$E(\delta) = \frac{2 A_0}{\beta \sin \delta} \sin \left(\beta \frac{H}{2} \sin \delta \right) = A_0 H \frac{\text{Sin} \left(\frac{\pi H \cdot \sin \delta}{\lambda} \right)}{\left(\frac{\pi H \cdot \sin \delta}{\lambda} \right)}$$

soit en posant :

$$u = \frac{\pi H \cdot \sin \delta}{\lambda}$$

$$E(\delta) = A_0 \cdot H \cdot \frac{\sin u}{u}$$

expression déjà rencontrée au paragraphe 5 dans le cas des alignements à très grand nombre de sources. La loi de répartition étant un créneau, nous trouvons donc bien que sa transformée de Fourier est un .

$$\frac{\sin x}{x}$$

On aurait trouvé de même :

$$E(\gamma) = B_0 L \frac{\sin u}{u}, \text{ avec : } u = \frac{\pi L \cdot \sin \gamma}{\lambda}$$

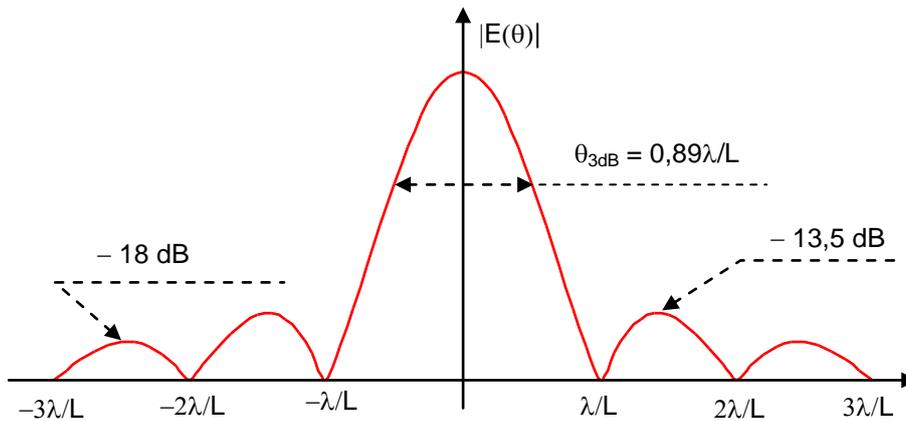
D'après le principe de multiplication des diagrammes, l'expression du diagramme de rayonnement de l'ouverture sera donnée à un coefficient près par :

$$E(\gamma, \delta) = \frac{\text{Sin}\left(\frac{\pi \cdot L \cdot \sin \gamma}{\lambda}\right)}{\frac{\pi \cdot L \cdot \sin \gamma}{\lambda}} \cdot \frac{\text{Sin}\left(\frac{\pi \cdot H \cdot \sin \delta}{\lambda}\right)}{\frac{\pi \cdot H \cdot \sin \delta}{\lambda}}$$

La fonction $\text{sin}(u)/u$ est maximum pour $u = 0$ et prend alors la valeur de 1. Elle s'annule pour $u = k\pi$, le premier zéro étant pour $|u| = \pi$, Soit :

$$\frac{\pi L}{\lambda} \sin \gamma = \pm \pi ; \sin \gamma = \pm \frac{\lambda}{L} ; \text{ ou si } \gamma \text{ est petit : } \gamma = \pm \frac{\lambda}{L}$$

L'allure du diagramme d'antenne dans un plan principal est le suivant :



L'ouverture du lobe à 3 dB est : $\theta_{3dB} = 0,89 \cdot \lambda/L$ en radian, $\theta_{3dB} = 51 \cdot \lambda/L$ en degrés.

Le premier lobe secondaire est à 13,5 dB au-dessous du lobe principal.

6.6 INFLUENCE D'UNE VARIATION DE PHASE LE LONG DE L'OUVERTURE

Le diagramme de rayonnement d'une ouverture plane, équiphase à répartition uniforme, présente un maximum dans la direction de la normale à l'ouverture ; plus généralement, une ouverture équiphase donnera toujours un maximum de rayonnement dans la direction de la normale à l'ouverture quelle que soit la répartition d'amplitude, dès l'instant qu'elle est continue. La direction du maximum de rayonnement ne dépend donc que de la loi de phase sur l'ouverture $\phi(x)$;

On aura alors (cf. paragraphe 6.5) :

$$E(\delta) = A_o \int_{-H/2}^{+H/2} E_1(x) \cdot e^{j\phi(x)} \cdot e^{j\beta x \sin \delta} dx$$

$E(\delta)$ ne sera plus maximum pour $\delta = 0$, mais pour une valeur $\delta = \delta_o$ qui dépend de $\phi(x)$.

Dans le cas où $\phi(x)$ est une fonction linéaire de x (déphasage proportionnel à la distance algébrique du centre de l'ouverture), on a $\phi(x) = ax$, par ailleurs $A(x) = A_o E_1(x)$ d'où :

$$E(\delta) = \int_{-H/2}^{+H/2} A(x) \cdot e^{jax} \cdot e^{j\beta x \sin \delta} dx$$

$$E(\delta) = \int_{-H/2}^{+H/2} A(x) \cdot e^{jx(a+\beta \sin \delta)} dx$$

Dans le cas d'une illumination uniforme $A(x) = A_0$, on trouve :

$$E(\delta) = HA_0 \frac{\sin\left(\frac{H}{2} \cdot (a + \beta \sin \delta)\right)}{\frac{H}{2} \cdot (a + \beta \sin \delta)}$$

qui est la fonction $\sin(u)/u$, avec $u = H(a + \beta \sin(\delta))/2$ et le maximum de rayonnement est donné pour $u = 0$ soit (en radian), si δ est petit :

$$\delta_m \cong -\frac{a}{\beta} = -\frac{a\lambda}{2\pi}$$

La direction du maximum de rayonnement dépend des caractéristiques de la loi de phase sur l'ouverture ; on pourra donc, comme dans les cas des alignements, commander par ce moyen la direction du faisceau d'antenne.

6.7 OUVERTURE RECTANGULAIRE À ILLUMINATION NON UNIFORME

L'ouverture à répartition uniforme donne le maximum de gain, mais avec des lobes secondaires à 13,5 dB au-dessous du lobe principal. Ce niveau de lobe secondaire est trop élevé pour les applications radar.

Pour diminuer le niveau des lobes secondaires, on adopte des lois de répartition de champs dont l'amplitude décroît du centre vers les extrémités de l'ouverture. Il n'est pas possible de trouver une source permettant de donner une répartition de champ nulle à l'extérieur du réflecteur. On choisit donc un champ qui présente, sur les bords de l'ouverture, une amplitude faible par rapport à celle du champ au centre.

On exprime l'atténuation sur les bords de l'ouverture, due à la loi d'éclairement en dB, soit $10 \log$ du rapport de la densité de puissance au centre de l'aérien, à celle existant sur les bords.

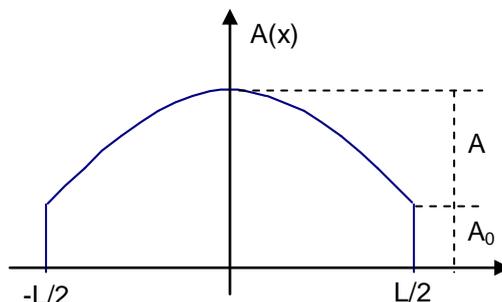
Cette atténuation devra être d'autant plus grande que l'on recherche des lobes secondaires faibles.

Les lois de répartition usuelles se présentent donc sous la forme d'une somme de lois, l'une d'amplitude constante A_0 égale au niveau sur les bords du réflecteur et l'autre $A_1(x)$ d'amplitude décroissant du centre vers les extrémités. On a alors :

$$A(x) = A_0 + A_1(x)$$

Par exemple, dans le cas d'une loi $A_1(x)$ en cosinus, on aurait :

$$A(x) = A_0 + A \cdot \cos \frac{\pi x}{L}$$



Le champ rayonné a pour expression générale :

$$E(\theta) = \int_{-L/2}^{+L/2} A(x) e^{j\beta x \sin \theta} dx$$

soit :

$$E(\theta) = \int_{-L/2}^{+L/2} A_0 e^{j\beta x \sin \theta} dx + \int_{-L/2}^{+L/2} A_1(x) e^{j\beta x \sin \theta} dx$$

$$E(\theta) = LA_0 \frac{\sin u}{u} + \int_{-L/2}^{+L/2} A_1(x) e^{j\beta x \sin \theta} dx$$

avec :

$$U = (\pi L/\lambda) \sin \theta$$

$$A_1(x) = A \cos \frac{\pi x}{L}$$

$$E(\theta) = LA_0 \frac{\sin u}{u} + A \int_{-L/2}^{+L/2} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cdot e^{j\beta x \sin \theta} dx$$

ce qui donne , en posant $A_0 = \alpha A$:

$$E(\theta) = LA \left(\alpha \frac{\sin u}{u} + \frac{\pi}{2} \frac{\cos u}{\pi^2/4 - u^2} \right)$$

Le tableau ci-après donne les caractéristiques de $E(\theta)$ dans ce cas.

ATTÉNUATION SUR LES BORDS	FACTEUR DE GAIN	OUVERTURE à 3 dB EN DEGRÉS	NIVEAU DU 1 ^{er} LOBE SECONDAIRE
10 dB	0,9	61.λ/L	-20 dB
12 dB	0,87	63.λ/L	-21 dB
15 dB	0,85	65.λ/L	-22 dB
20 dB	0,82	67.λ/L	-23 dB

La loi en cosinus permet d'obtenir un niveau de lobes secondaires de 23 dB au-dessous du principal, si l'on désire des lobes secondaires plus bas, il faut adopter des lois en :

$$\cos^n \left(\frac{\pi x}{L} \right) \text{ avec } n > 1$$

Par exemple, la loi en cosinus carré ($\cos^2(\pi x / \dots)$) donne un champ $E(\theta)$ de la forme :

$$E(\theta) = AL \cdot \left[\frac{\alpha \sin u}{u} + \frac{\sin u}{u} + \frac{1}{1 - u^2/\pi^2} \right]$$

Avec une atténuation sur les bords de 20 dB, on obtient ainsi un niveau de lobes secondaires de -32 dB, une ouverture à 3 dB de 82.λ/L et un facteur de gain de 0,66. On constate une diminution très nette du niveau des lobes secondaires s'accompagnant d'une diminution sensible du facteur de gain et d'un élargissement du lobe principal.

La loi de répartition de champ sur l'ouverture a donc une grande influence sur le diagramme de rayonnement d'une ouverture et l'on pourrait théoriquement, en choisissant une loi de *Gauss*, supprimer totalement les lobes secondaires, ou, en choisissant une loi continue proche des lois de *Taylor* ou de *Tchebycheff*, optimiser le gain de l'aérien à niveau de lobes secondaires donné. Nous verrons plus loin que cela n'est pas toujours facile.

On peut retenir que, d'une manière générale, si l'on veut obtenir des lobes secondaires faibles, il faudra accepter de perdre sur le gain de l'antenne.

En application radar, le choix du diagramme d'antenne résulte d'un compromis entre un niveau de lobes secondaires faible et une perte de gain raisonnable.

De toutes manières, l'existence de lobes secondaires a d'autres causes, par exemple, la présence de la source devant le réflecteur, les déformations du réflecteur et la présence d'un radôme. Ces différentes causes conduisent, dans la réalité, à des niveaux de lobes secondaires nettement plus importants que ceux dus uniquement à la loi d'illumination sur le réflecteur.

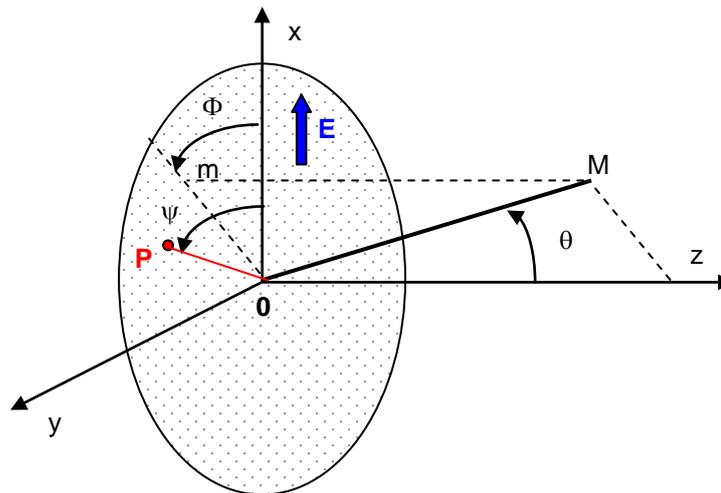
6.8 LES OUVERTURES CIRCULAIRES

L'étude du rayonnement des ouvertures circulaires est importante pour celle des réflecteurs paraboliques qui, nous le verrons plus loin, peuvent être considérés comme tels.

Nous considérons des ouvertures équiphasées, présentant donc un maximum de rayonnement dans la direction de la normale au plan de l'ouverture.

L'expression du champ rayonné par une ouverture plane est, pour les petits angles (cf. § 6.1) :

$$E(\vec{OM}) = \frac{e^{-j\beta.R}}{\lambda.R} \iint_S E(\vec{OP}) \cdot e^{j\beta \cdot \vec{OP} \cdot \vec{u}} ds$$



Avec, en repérant le point *P* par ses coordonnées polaires :

$$\vec{OP} = \begin{Bmatrix} \rho \cdot \cos \psi \\ \rho \cdot \sin \psi \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ et } \vec{u} = \begin{Bmatrix} \sin \theta \cdot \cos \Phi \\ \sin \theta \cdot \sin \Phi \\ \cos \theta \end{Bmatrix}$$

D'où, si *D* est le diamètre de l'ouverture :

$$E(\theta, \Phi) = \frac{e^{-j\beta R}}{\lambda R} \int_0^{2\pi} \int_0^{D/2} E(\rho, \psi) \cdot \exp\{j\beta\rho \cdot \sin\theta(\cos\psi \cdot \cos\Phi + \sin\psi \cdot \sin\Phi)\} \rho d\rho \cdot d\psi$$

En particulier, dans le plan xoz (plan E) où $\Phi = 0$

$$E(\theta, \psi) = \frac{e^{-j\beta R}}{\lambda R} \int_0^{2\pi} \int_0^{D/2} E(\rho, \psi) \cdot \exp\{j\beta\rho \cdot \cos\psi \cdot \sin\theta\} \rho d\rho \cdot d\psi$$

On peut mettre cette expression sous une autre forme en faisant apparaître les variables auxiliaires :

$$u = \frac{\pi D}{\lambda} \cdot \sin\theta \quad \text{et} \quad r = \frac{2\rho}{D}$$

On aura alors :

$$d\rho = \frac{D}{2} \cdot dr$$

$$\frac{e^{-j\beta R}}{\lambda R} E(\rho, \psi) = f(r, \psi)$$

$$\beta \cdot \rho \cdot \sin\theta = u \cdot r$$

$$E(\theta) = \frac{D^2}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^1 f(r, \psi) \cdot \exp\{j u r \cos\psi\} \cdot r dr \cdot d\psi$$

6.8.1 Répartition uniforme du rayonnement

Dans ce cas particulier, $f(r, \psi) = A_0$, on écrira, donc :

$$E(\theta) = \frac{D^2}{4} \cdot A_0 \int_0^1 r \cdot dr \int_0^{2\pi} e^{j u r \cos\psi} d\psi$$

Or :

$$\int_0^{2\pi} e^{j z \cos\phi} \cdot \cos n\phi \cdot d\phi = j^n 2\pi \cdot J_n(z)$$

$J_n(z)$ étant la fonction de Bessel d'indice n , soit ici pour $n = 0$:

$$\int_0^{2\pi} e^{j z \cos\phi} \cdot d\phi = 2\pi \cdot J_0(z)$$

ce qui donne en remplaçant dans l'expression de $E(\theta)$:

$$E(\theta) = \frac{D^2}{4} \cdot A_0 \int_0^1 2\pi \cdot J_0(ur) \cdot r \cdot dr$$

Or, d'après les propriétés des fonctions de Bessel, on a la relation :

$$\int_{z_0}^{z_1} Z^n J_{n-1}(Z) \cdot dZ = \left[Z^n \cdot J_n(Z) \right]_{z_0}^{z_1}$$

Posons : $ur = Z$; $udr = dZ$; $rdr = \frac{Z}{u} dZ$; il vient :

$$E(\theta) = \frac{\pi D^2}{2} A_0 \frac{1}{u^2} \int_0^u Z J_0(Z) dZ$$

$$\text{avec : } \int_0^u Z J_0(Z) dZ = [Z J_1(Z)]_0^u = u \cdot J_1(u)$$

$$E(\theta) = \frac{\pi D^2}{2} \cdot A_0 \cdot \frac{u \cdot J_1(u)}{u^2} = \frac{\pi D^2}{2} \cdot A_0 \cdot \frac{J_1(u)}{u}$$

$$E(\theta) = K \cdot A_0 \frac{J_1(u)}{u}$$

$E(\theta)$ est donc de la forme $J_1(u)/u$ avec $u = (\pi D/\lambda) \cdot \sin\theta$, qui est l'analogue de $\sin(u)/u$ pour une ouverture rectangulaire. Un calcul identique donnerait par raison de symétrie le même résultat pour $E(\theta)$ dans le plan H.

La fonction $J_1(u)/u$ présente un maximum pour $u = 0$, soit pour $\theta = 0$ qui est la direction de la normale à l'alignement, le premier lobe secondaire est à 17,5 dB au-dessous du maximum (contre 13,5 dB pour le $\sin(u)/u$) et la largeur de lobe à 3 dB, $\theta_{3dB} = \lambda/D$ contre $0,9 \cdot \lambda/L$ pour l'ouverture rectangulaire.

Nous pouvons donc conclure que pour une loi de répartition identique, l'ouverture circulaire donne des lobes secondaires plus faibles que l'ouverture rectangulaire, mais un diagramme plus large.

Le gain dans la direction du maximum de rayonnement, pour une répartition uniforme, est toujours donné par :

$$G_m = \frac{4\pi S}{\lambda^2} = \frac{4\pi}{\lambda^2} \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi^2 D^2}{\lambda^2}$$

au lieu de :

$$G_m = \frac{4\pi LH}{\lambda^2} \quad \text{pour l'ouverture rectangulaire.}$$

6.8.2 Réduction des lobes secondaires

De même que pour les ouvertures rectangulaires, et afin de diminuer le niveau des lobes secondaires, on adopte des lois de répartition présentant une décroissance du centre vers les bords de l'ouverture, par exemple :

$$f(r, \psi) = A(1 - r^2)^n$$

Ces lois sont l'analogue de celle en $\cos^n(\pi x/L)$ pour les ouvertures rectangulaires,

- pour $n = 1$ on obtient un diagramme en $\frac{J_2(u)}{u^2} \cdot 2KA$
- pour $n = 2$ on obtient un diagramme en $\frac{J_3(u)}{u^3} \cdot 8KA$
- etc.

En pratique, la loi d'éclairement se présente sous la forme d'une loi en $A(1 - r^2)^n$ et d'une loi uniforme A_0 représentant l'atténuation sur les bords de l'ouverture. On aurait, par exemple, pour $n = 1$:

$$E(\theta) = K \cdot A \left(\alpha \frac{J_1(u)}{u} + 2 \frac{J_2(u)}{u^2} \right)$$

$A_0/A = \alpha$ dépend de l'atténuation sur les bords choisie. D'où le tableau de résultats suivant, que l'on comparera utilement avec celui du paragraphe 6.7 :

ATTÉNUATION SUR LE BORD	FACTEUR DE GAIN	OUVERTURE à 3 dB	NIVEAU DU 1 ^{er} LOBE SECONDAIRE
10 dB	0,81	67 λ / D	-21 dB
12 dB	0,79	69 λ / D	-22 dB
15 dB	0,77	71 λ / D	-23,5 dB
20 dB	0,75	73 λ / D	-24,5 dB

Le compromis facteur de gain niveau des lobes secondaires est ici un peu moins favorable que pour l'ouverture rectangulaire (loi en cosinus). En adoptant une loi avec $n = 2$, on peut, pour 20 dB d'atténuation, descendre le niveau du 1^{er} lobe secondaire à 35 dB environ, mais avec un facteur de gain de 0,56.

7 RELATIONS D'APPLICATION

7.1 FORMULES DE L'ANTENNE THÉORIQUE

Il est commode pour l'utilisateur de retenir de façon schématique les propriétés des aériens :

- focalisation de la puissance dans un angle solide déterminé,
- gain dans la direction du maximum de rayonnement.

Nous définirons donc une antenne idéale comme une ouverture plane de hauteur H et largeur L, rayonnant toute la puissance qui lui est transmise dans un angle solide : $\theta_H \cdot \theta_L = d\Omega$

Son gain est, par définition :

$$G = \frac{4\pi}{d\Omega} = \frac{4\pi S}{\lambda^2}$$

ce qui permet d'écrire :

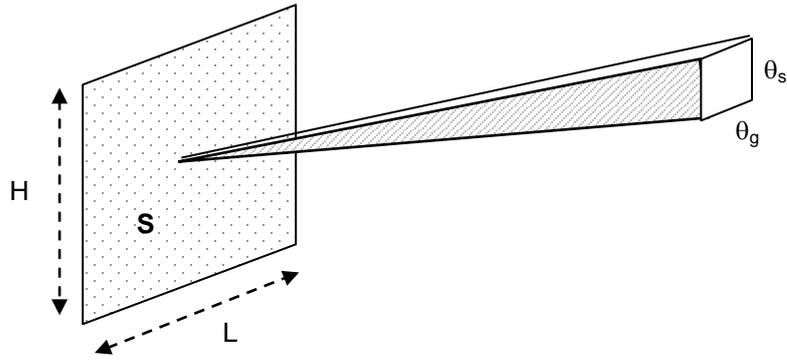
$$G = \frac{4\pi L \cdot H}{\lambda^2} = \frac{4\pi}{\theta_H \theta_L}$$

donc (θ en radian) :

$$\theta_H = \frac{\lambda}{H} \quad \text{et} \quad \theta_L = \frac{\lambda}{L}$$

par analogie avec l'étude des réseaux plans. Ces valeurs de θ_H et θ_L sont légèrement supérieures aux ouvertures à mi-puissance (rapport 1,1 dans le cas d'une loi d'éclairement uniforme).

On peut donc résumer les *relations de l'antenne théorique idéale* :



$G = \frac{4 \pi S}{\lambda^2}$	<ul style="list-style-type: none"> • S : surface de l'antenne en m^2
$G = \frac{41\,500}{\theta_H \theta_L}$	<ul style="list-style-type: none"> • λ : longueur d'onde en m
$\theta_H = 57 \lambda / H$	<ul style="list-style-type: none"> • $\theta_H \theta_L$: ouvertures du lobe en degrés
$\theta_L = 57 \lambda / L$	<ul style="list-style-type: none"> • L : largeur de l'antenne en m

7.2 FORMULES DE L'ANTENNE PRATIQUE

Pour rapprocher les antennes pratiques de l'antenne idéale, il faut tenir compte :

- du facteur de gain f lié à la loi d'éclairement,
- du rendement de l'illumination (toute la puissance transmise à l'antenne n'est pas rayonnée par l'ouverture équivalente) ceci à cause des pertes dans les guides, sources, spill-over, etc. dues à la nature physique des éléments.

On choisira comme largeur de lobe la largeur à mi-puissance :

$$\theta_{3dB} = 60 \text{ à } 70 \frac{\lambda}{L}$$

Le facteur de gain variera alors de 0,7 à 0,9. L'ensemble des pertes peut être estimé entre 0,5 et 2 dB (coefficient 0,9 à 0,6).

D'où les relations pratiques :

$\frac{70 \lambda}{L} > \theta_L > \frac{60 \lambda}{L}$	<ul style="list-style-type: none"> • S : surface de l'antenne en m^2
$\frac{70 \lambda}{H} > \theta_H > 60 \frac{\lambda}{H}$	<ul style="list-style-type: none"> • λ : longueur d'onde en m
$0,4 \cdot \frac{4 \pi S}{\lambda^2} < G < 0,8 \frac{4 \pi S}{\lambda^2}$	<ul style="list-style-type: none"> • $\theta_H \theta_L$: ouvertures du lobe en degrés
$0,4 S < A < 0,8 S$	<ul style="list-style-type: none"> • L : largeur de l'antenne en m
$\frac{15\,000}{\theta_H \cdot \theta_L} < G < \frac{30\,000}{\theta_H \cdot \theta_L}$	

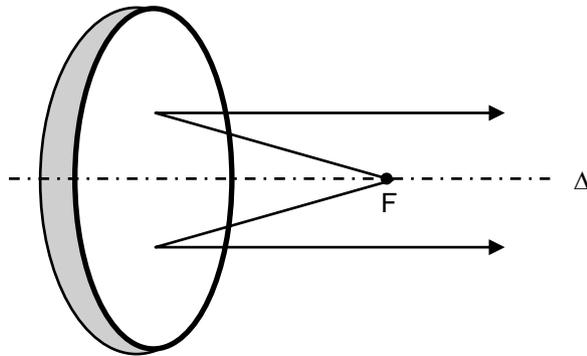
Dans le cas des ouvertures circulaires $L = H = D$.

Ces relations donnent un ordre de grandeur, les performances minimales correspondent aux antennes de veille, les maximales aux antennes de poursuite.

8 LES PARABOLOÏDES DE RÉVOLUTION

Une manière très utilisée pour obtenir des ouvertures rayonnantes est d'« éclairer » à l'aide d'une source primaire, un réflecteur de forme adaptée.

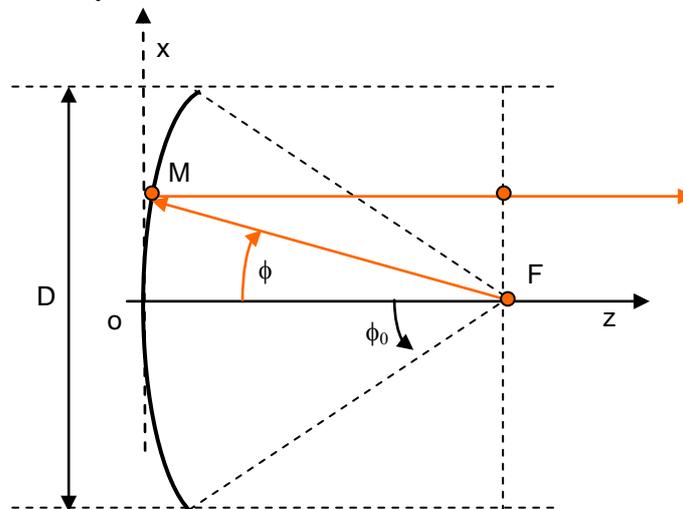
Le cas le plus simple consiste à placer la source primaire au foyer d'un parabolôïde de révolution. Le parabolôïde de révolution est la surface engendrée par la rotation d'un arc de parabole autour de son axe de symétrie.



Si on éclaire cette surface par une source placée en son foyer F, on forme un faisceau de rayons parallèles à l'axe de symétrie, réciproquement, un faisceau de rayons parallèles à Δ est focalisé en F. Cette propriété « optique » des parabolôïdes est utilisée en hyperfréquence pour former des aériens.

8.1 OUVERTURE ÉQUIVALENTE

Considérons un parabolôïde de focale : $d = OF$ et de diamètre D, et un plan π perpendiculaire à OF passant par F. Un « rayon » FM, se réfléchit dans la direction MP.



D'après les propriétés de la parabole, on peut écrire : $FM + MP = 2d = ct^\circ$

Si $d = OF$ distance focale de la parabole.

D'où, comme : $\overline{MP} \operatorname{tg} \Phi = \overline{FM} \sin \Phi = \overline{FP}$

$$2d = \overline{FP} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \Phi} + \frac{1}{\sin \Phi} \right) = \overline{FP} \left(\frac{1 + \cos \Phi}{\sin \Phi} \right) = \cot g \frac{\Phi}{2}$$

Posons : $FM = \rho$, $FP = r$, les principales relations liant ces paramètres sont :

$$r = \rho \sin \Phi = 2d \operatorname{tg} \frac{\Phi}{2} = 2d \frac{\sin \Phi}{1 + \cos \Phi}$$

Toute onde sphérique rayonnée à partir du point F dans le cône d'angle au sommet ϕ_0 créera donc dans le plan π une ouverture rayonnante dans laquelle tous les champs sont en phase, car les chemins parcourus sont égaux.

La direction du maximum de rayonnement de l'aérien sera donc OF axe de symétrie du paraboloïde.

Le diamètre de l'ouverture rayonnante sera :

$$D = 4d \cdot \operatorname{tg} \frac{\Phi_0}{2}$$

Φ_0 étant souvent imposé, cette relation permet de calculer D en fonction de d.

8.2 DIAGRAMME DE RAYONNEMENT

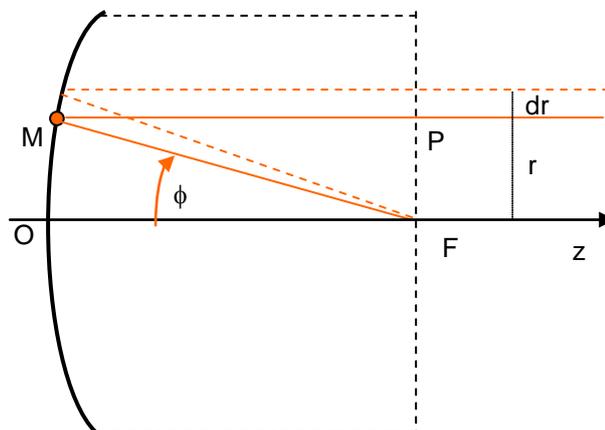
Pour connaître le diagramme de rayonnement d'un tel aérien, il suffit de connaître la répartition en amplitude du champ sur l'ouverture rayonnante.

On supposera la source primaire, rayonnant une onde sphérique, au foyer F du paraboloïde avec un gain ne dépendant que de l'angle Φ :

$$g(\Phi) = \frac{4 \pi w(\Phi)}{W_t}$$

L'angle solide compris entre deux cônes d'angle au sommet 2Φ et $2(\Phi + d\Phi)$ s'écrit :

$$d\Omega = 2\pi \sin \Phi d\Phi.$$



D'où la puissance rayonnée entre ces deux cônes :

$$W(\Phi) = w(\Phi) \cdot 2\pi \cdot \sin \Phi \cdot d\Phi$$

Cette puissance est dans l'ouverture rayonnante répartie entre deux cercles de rayons r et $r + dr$, d'où, si on définit la densité de puissance par unité de surface dans l'ouverture rayonnante : $P(r)$

$$W(\Phi) = 2\pi \cdot r \cdot dr P(r)$$

$$P(r) = \frac{w(\Phi) \cdot 2\pi \cdot \sin \Phi \cdot d\Phi}{2\pi r \cdot dr}$$

Nous avons vu en 8.1 que : $FM = \rho$; $FP = r$; $OF = D$

$$r = \rho \sin \Phi = \frac{2d \cdot \sin \Phi}{1 + \cos \Phi}$$

soit :

$$dr = 2d \cdot \frac{1}{1 + \cos \Phi} d\Phi = \rho d\Phi$$

et :

$$P(r) = \frac{w(\Phi) \cdot 2\pi \sin \Phi d\Phi}{2\pi \cdot \rho \sin \Phi \cdot \rho d\Phi} = \frac{w(\Phi)}{\rho^2}$$

d'où, l'expression du champ électrique sur la surface rayonnante :

$$E(r) = \frac{K\sqrt{g(\Phi)}}{\rho}$$

avec :

$$\rho^2 = r^2 + |MP|^2 = r^2 + (2d - \rho)^2 = r^2 + 4d^2 - 4d \cdot \rho + \rho^2$$

Soit :

$$\rho = d + \frac{r^2}{4d}$$

On peut donc écrire :

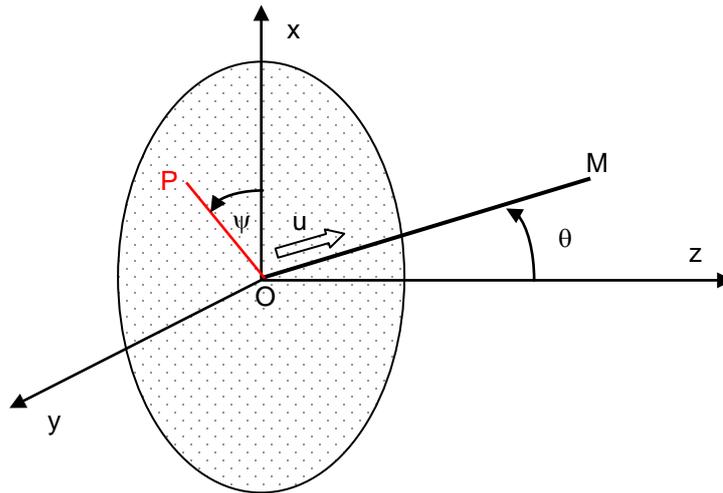
$$E(r) = \frac{\sqrt{g(\Phi)}}{\rho} = \frac{\sqrt{g(\Phi)}}{d + r^2 / 4d}$$

Connaissant $g(\Phi)$, il est alors possible de calculer la distribution du champ sur l'ouverture.

8.3 GAIN DU PARABOLOÏDE

Le gain d'une ouverture rayonnante est donné par la relation (cf. 6.3) :

$$G(\vec{OM}) = \frac{4\pi}{\lambda^2} \frac{[\iint_S \vec{E}(\vec{OP}) \cdot e^{j\beta \cdot \vec{OP} \cdot \vec{u}} ds]^2}{\iint_S [E(\vec{OP})]^2 ds}$$



Dans le cas du paraboloïde, nous avons considéré que seules les ondes focalisées par le réflecteur participaient au rayonnement principal. Par contre, la source placée en F rayonne, à priori, de la puissance dans tout l'espace. Le domaine d'intégration du dénominateur qui, à un coefficient près, représente la puissance totale fournie, est donc à étendre à tout l'espace.

On peut alors calculer le dénominateur « I_1 » :

$$I_1 = \iiint |E(OP)|^2 ds = \iiint |E(r)|^2 r d\psi \cdot dr = \iiint \frac{g(\Phi)}{\rho^2} r d\psi \cdot dr$$

$$\text{avec (cf. § 8.2) : } r = \rho \sin \Phi, \quad dr = \rho d\Phi$$

$$I_1 = \iiint g(\Phi) \sin \Phi \cdot d\Phi \cdot d\psi = \iiint g(\Phi) \cdot d\Omega$$

intégrale à tout l'espace de $g(\Phi)$.

$$I_1 = 4\pi$$

car (cf. 3.1) :

$$G(\theta, \Phi) = \frac{w(\theta, \Phi) \cdot 4\pi}{W_T} \quad \text{et : } \iint w(\theta, \Phi) \cdot d\Omega = W_T$$

dans le cas d'une antenne sans perte.

Le numérateur « I_2 » dans la direction du maximum de rayonnement (axe Oz) s'écrit :

$$I_2 = \int_0^{D/2} \int_0^{2\pi} E(r) \cdot r d\psi \cdot dr = 2\pi \int_0^{D/2} E(r) \cdot r \cdot dr$$

soit, en reprenant le changement de variable précédent :

$$I_2 = 2\pi \int_0^{\Phi_0} \frac{\sqrt{g(\Phi)}}{\rho} \cdot \rho^2 \sin \Phi \cdot d\Phi$$

et on sait que (cf. 8.1) :

$$\rho = \frac{2d}{1 + \cos \Phi} = \frac{d}{\cos^2(\Phi/2)}$$

$$d = \frac{D}{4} \text{Cotg}(\Phi_0/2)$$

d'où :

$$I_2 = \pi \cdot D \cdot \text{Cotg}(\Phi_o / 2) \int_0^{\Phi_o} \sqrt{g(\Phi)} \cdot \text{tg}(\Phi / 2) \cdot d\Phi$$

On peut maintenant calculer le gain maximum $G_m = \frac{4\pi}{\lambda^2} \frac{I_2^2}{I_1}$

$$G_m = \left(\frac{\pi \cdot D}{\lambda} \right)^2 \text{Cotg}^2(\Phi_o / 2) \cdot \left[\int_0^{\Phi_o} \sqrt{g(\Phi)} \cdot \text{tg}(\Phi / 2) \cdot d\Phi \right]^2 = \left(\frac{\pi \cdot D}{\lambda} \right)^2 f$$

On voit, dans ce cas, apparaître le facteur de gain f comme une fonction du seul gain $g(\Phi)$ de la source primaire et de « l'ouverture » Φ_o du paraboloïde.

A $g(\Phi)$ donné, f passe par un maximum pour une valeur particulière de Φ_o que l'on peut déterminer. Chaque type de source primaire impose ainsi une ouverture de paraboloïde, d'où la relation liant son diamètre D à sa distance focale d .

L'optimum est le résultat de deux actions contradictoires :

- diminution du facteur de gain f_o de l'ouverture lorsque Φ_o augmente, liée à une augmentation de l'atténuation sur les bords,
- augmentation du rendement η entre la puissance rayonnée par l'ouverture et celle fournie par la source lorsque Φ_o augmente.

$$f = f_o \quad \eta = \text{Cotg}^2(\Phi_o / 2) \left[\int_0^{\Phi_o} \sqrt{g(\Phi)} \cdot \text{tg}(\Phi / 2) \cdot d\Phi \right]^2$$

Dans les cas pratiques, et suivant les sources primaires utilisées, le facteur de gain f_o et le rendement η sont, à l'optimum, compris entre 0,7 et 0,8.

Finalement, on pourra retenir un facteur de gain global de l'ordre de 0,6 associé à une ouverture de lobe à 3 dB de $65 \cdot \lambda / D$.

Notons que les relations établies pour les paraboloïdes l'ont été dans le cas simple où le diagramme $g(\Phi)$ de la source primaire est de révolution autour de l'axe focal de la parabole, ce qui n'est pas toujours le cas en pratique. Le calcul d'un paraboloïde est donc, en fait, très complexe.

Nous noterons, en outre, que le lobe principal a une allure parabolique en décibel, jusqu'à - 12 dB environ sous son maximum, ce qui permet d'écrire avec une bonne approximation, en fonction de son ouverture à 3 dB :

$$G(\theta) = G_o \cdot \exp \left\{ -2,8 \left(\frac{\theta}{\theta_o} \right)^2 \right\} \quad \text{ou : } G_{\text{dB}}(\theta) = G_{\text{odB}} - 12 \left(\frac{\theta}{\theta_o} \right)^2$$

$$G_o \cong 27000 / \theta_o^2$$

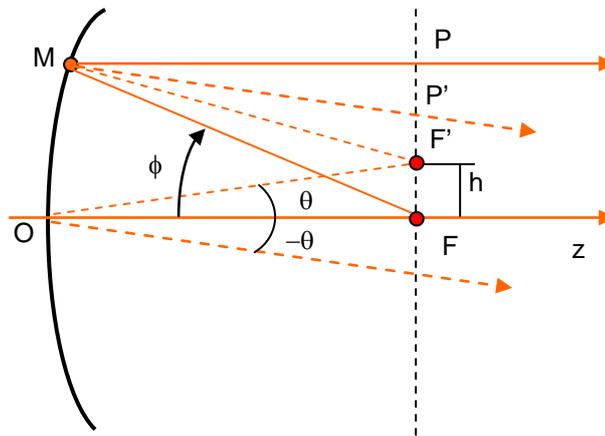
8.4 DÉFOCALISATION DE LA SOURCE PRIMAIRE

Les résultats précédents ne sont valables que si le centre de phase de la source primaire se trouve au foyer du paraboloïde. Tout déplacement de ce centre de phase agira sur le diagramme de rayonnement de l'aérien.

Un déplacement axial (suivant OF) produit une variation de phase symétrique par rapport au sommet O du paraboloïde La direction de rayonnement reste inchangée, mais cet effet se fait généralement ressentir par une perte de gain, un élargissement du lobe et une remontée des lobes secondaires.

Un déplacement transversal (perpendiculaire à OF) provoque une variation dissymétrique de la phase sur l'ouverture rayonnante, d'où une variation de la direction de rayonnement et une déformation du faisceau.

Nous allons calculer l'expression de la variation de phase ϕ dans le cas d'un déplacement h faible, dans le plan focal de l'aérien.



D'après les propriétés optiques de la parabole, tout rayon issu de F' se réfléchit dans la direction θ comme indiqué sur la figure ci-avant.

Il en résultera donc, une phase relative le long de l'ouverture rayonnante (β constante de propagation des ondes). :

$$\Delta\phi = \beta(FM + MP) - \beta(F'M + MP')$$

On sait que :

$$FM + MP = \rho(1 + \cos \Phi) = 2d.$$

Dans le triangle FMF' ($FM = \rho$; $FF' = h$) :

$$|F'M|^2 = \rho^2 + h^2 - 2\rho \cdot h \cdot \sin \Phi$$

soit, si on se limite au premier ordre $h/\rho \ll 1$:

$$F'M \cong \rho \left(1 - \frac{h \cdot \sin \Phi}{\rho} \right)$$

Dans le triangle MPP'

$$MP' = \frac{MP}{\cos \theta} \cong MP \left(1 + \frac{\theta^2}{2} \right), \text{ avec } \theta \gg 1, \text{ donc :}$$

$$MP' \cong MP \cong \rho \cos \Phi$$

$$F'M + MP' \cong \rho(1 + \cos \Phi) - h \sin \Phi$$

Et comme :

$$\Delta\phi = \beta \cdot h \sin \Phi$$

On connaît :

$$\text{tg}(\Phi/2) = r/2d \text{ et : } \sin \Phi = \frac{2 \text{tg}(\Phi/2)}{1 + \text{tg}^2(\Phi/2)}$$

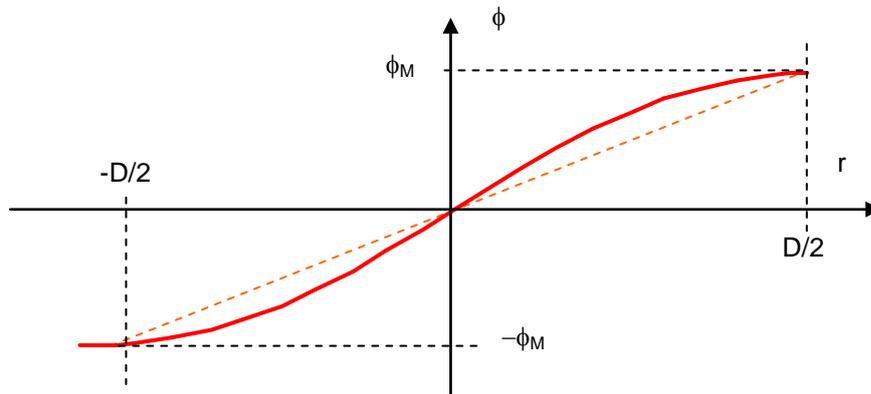
il vient :

$$\Delta\phi = \beta \cdot h \cdot \frac{2r/2d}{1 + r^2/4d^2}$$

expression que l'on met sous la forme, en posant $\text{tg}\theta \cong \theta = h/d$:

$$\Delta\phi = \frac{\beta \cdot r \cdot \theta}{1 + r^2/4d^2}$$

Il s'ensuit une variation impaire de la phase le long de l'ouverture dont l'allure est la suivante :



Cette variation se solde en première approximation par une variation linéaire de phase de pente « a » telle que :

$$\frac{\beta \cdot \theta}{1 + D^2/16 \cdot d^2} < a < \beta \cdot \theta$$

d'où, suivant le § 6.6, un dépointage de faisceau de la valeur : $\theta_m = a/\beta$, soit :

$$\frac{\theta}{1 + D^2/16 \cdot d^2} < \theta_m < \theta$$

La déflexion du faisceau est donc légèrement inférieure à celle que l'on aurait pu prévoir par la théorie optique, elle en est d'autant plus proche que la focale du paraboloïde utilisée est grande.

Par ailleurs, de nombreux termes ont été négligés dans le calcul qui précède.

Le déphasage $\Delta\phi$ est en réalité de la forme :

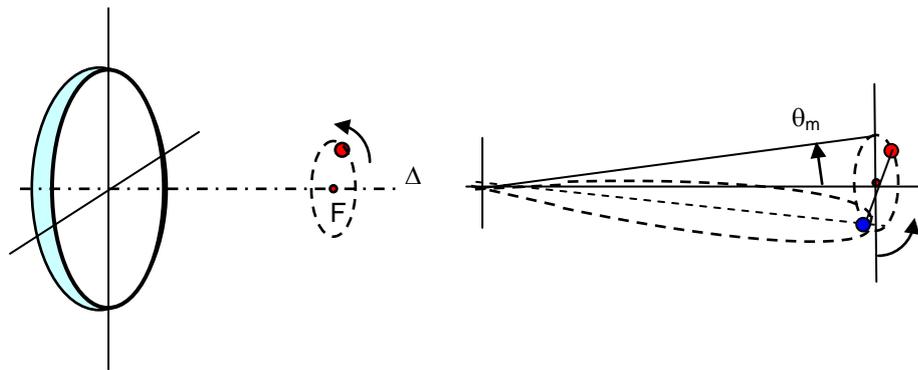
$$\Delta\phi = \beta(Ar + Br^2 + Cr^3 + Dr^4 \dots)$$

Les termes impairs, nous l'avons vu, participent à la déflexion du faisceau ; s'y ajoutent des aberrations qui sont :

- terme $B.r^2$: astigmatisme, élargissement du faisceau et remplacement des zéros du diagramme par des minima,
- terme $C.r^3$: aberration de coma, dissymétrie des lobes secondaires et du lobe principal,
- terme $D.r^4$: aberration sphérique, effet identique à celui de l'astigmatisme.

8.5 ANTENNES À BALAYAGE CONIQUE DU FAISCEAU

La défocalisation des sources primaires peut être volontaire. En particulier, dans le cas des radars de poursuite dits de « *Scanning* » (voir Chapitre 12), où la source primaire décrit un cercle dans le plan focal du paraboloïde, de telle manière que l'axe du faisceau de l'aérien décrive un cône centré sur OF et de demi-angle au sommet θ_m .



La déviation du faisceau à h donné est d'autant plus importante que la focale est courte. Par contre la diminution de la focale s'accompagne d'une perte de gain due au dépointage. Le meilleur compromis a été trouvé pour des valeurs de d/D variant de 0,25 à 0,5.

Dans le cas des antennes de *Scanning*, on définit (cf. Chap 12, § 3) une pente de modulation :

$$k = \left| \frac{dA}{A} / \frac{d\theta}{\theta} \right|$$

et la qualité de la mesure angulaire est définie par la relation :

$$\frac{\sigma_\theta}{\theta_0} = \frac{1}{k \sqrt{n \cdot S/B}}$$

- σ_θ : écart type de la mesure angulaire
- θ_0 : ouverture à 3 dB du lobe d'aérien
- A : amplitude du signal reçu
- S/B : rapport signal sur bruit en puissance (proportionnel à A^2)
- n : nombre de signaux intégrés dans la mesure.

On peut donc écrire :

$$\sigma_\theta = Q \left| \theta_0 \cdot \frac{d\theta}{\theta_0} / \frac{dA}{A} \cdot A \right| = Q \left| \frac{d\theta}{dA} \right|$$

Pour minimiser l'erreur angulaire, il convient donc de minimiser $d\theta/dA$.

8.5.1 Cas d'une liaison émission réception

Dans le cas du radar classique, l'amplitude du signal reçu est proportionnelle au gain de l'aérien, qui peut s'écrire aux environs du sommet du lobe, si θ est l'angle de la direction visée par rapport à l'axe du faisceau :

$$G = G_o \exp \left\{ -2,8 \left(\frac{\theta}{\theta_o} \right)^2 \right\}$$

Soit, si le radar fonctionne en émission réception sur écho de peau :

$$A = A_o \exp \left\{ -2,8 \left(\frac{\theta}{\theta_o} \right)^2 \right\}$$

$$\frac{dA}{d\theta} = -A_o \frac{5,6\theta}{\theta_o^2} \exp \left\{ -2,8 \left(\frac{\theta}{\theta_o} \right)^2 \right\}$$

$$\frac{d^2A}{d\theta^2} = -A_o \left[\left(\frac{5,6\theta}{\theta_o^2} \right)^2 - \frac{5,6}{\theta_o^2} \right] \exp \left\{ -2,8 \left(\frac{\theta}{\theta_o} \right)^2 \right\}$$

$\left| \frac{dA}{d\theta} \right|$ est donc maximum pour $\frac{d^2A}{d\theta^2}$ nul, soit :

$$\theta = \frac{\theta_o}{\sqrt{5,6}} \text{ qui sera la valeur choisie pour } \theta_m.$$

Par ailleurs, on peut écrire :

$$k = \left| \frac{dA}{A} \div \frac{d\theta}{\theta_o} \right| = \left| \frac{dA}{d\theta} \frac{\theta_o}{A} \right| = 5,6 \frac{\theta}{\theta_o}$$

ce qui donnerait pour la valeur θ_m retenue :

$$k = \sqrt{5,6} \cong 2,4$$

Néanmoins, on préfère en pratique estimer σ_θ en prenant comme référence le signal reçu dans la direction du gain maximum de l'aérien. On écrira donc

$$kA = k_s A_o$$

ce qui revient à considérer le coefficient k_s :

$$k_s = k \cdot \frac{A}{A_o} = k \cdot \exp \left\{ -2,8 \left(\frac{\theta}{\theta_o} \right)^2 \right\}$$

soit, à l'optimum, pour

$$\theta = \frac{\theta_0}{\sqrt{5,6}}$$

$$k_s = 2,4 \exp\left\{-\frac{2,8}{5,6}\right\} = \frac{2,4}{1,6}$$

$k_s \cong 1,5$

On notera, en outre, que la valeur choisie pour θ_m correspond à une déflexion telle que le lobe de l'aérien recoupe l'axe de l'antenne à 2 dB environ.

Cette valeur de $\theta_m = \theta_0/2,4$ est suffisamment faible pour que la perte de gain maximum due à la défocalisation puisse être considérée comme nulle, et les autres défauts inévitables comme tolérables.

8.5.2 Cas d'une liaison réception seule

Dans le cas où l'antenne ne fonctionne qu'à la réception (*sur émetteur externe ou répondeur*), l'amplitude du signal varie comme $G^{1/2}$. On démontre alors que $k = 2,8.\theta/\theta_0$ et que l'optimum est obtenu pour

$$\theta_0 / \theta = \sqrt{2,8}$$

ce qui donne : $k \cong 1,7$ et :

$$k_s = k \frac{A}{A_0} = k \exp\left\{-1,4 \left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^2\right\} \cong 1,1$$

$k_s \cong 1,1$

Le lobe d'antenne coupe alors l'axe de rotation à -1,3 dB.
