

CHAPITRE 10

ASPECT PROBABILISTE DU TRAITEMENT DU SIGNAL

Rédigé avec l'aide de Monsieur André BERGES

2^{ème} partie : Procédés de détection des cibles radar

12	INFLUENCE DE LA FLUCTUATION DES CIBLES	42
12.1	MECANISME DE LA FLUCTUATION (CAS 1)	42
12.2	SECOND MODELE DE FLUCTUATION (CAS 2)	43
12.3	PROBABILITE DE FAUSSE ALARME.....	44
12.4	PROBABILITE DE DETECTION - CAS 1	44
12.5	PROBABILITE DE DETECTION - CAS 2	45
12.6	COMPARAISON DES RESULTATS	47
13	LUTTE CONTRE LA FLUCTUATION DES CIBLES	48
13.1	RETOUR SUR LE PHENOMENE DE FLUCTUATION	48
13.2	ANALYSE DE LA FLUCTUATION SUR UN MODELE SIMPLIFIE	49
13.3	EFFET D'UNE DIVERSITE A DEUX FREQUENCES	50
13.4	PASSAGE A LA LIMITE	52
14	CALCUL DIRECT DE L'EFFET DIVERSITE RADARS DIVERSITE ET ALEATOIRES	53
14.1	DIVERSITE A DEUX VOIES - CAS 1 DE FLUCTUATION	53
14.2	DIVERSITE A TROIS VOIES	55
14.3	DIVERSITE A QUATRE VOIES	55
14.4	CAS DE N ENTREES	56
14.5	APPLICATION AU PREMIER CAS DE FLUCTUATION.....	56
14.6	APPLICATION AU DEUXIEME CAS DE FLUCTUATION	58
14.7	INTERPRETATION DES RESULTATS.....	62
15	CONSEQUENCES SUR L'UTILISATION DU RADAR DIVERSITE.....	63
16	L'INTEGRATION APRES DETECTION.....	65
16.1	CIBLE NON FLUCTUANTE.....	65
16.2	CIBLE LENTEMENT FLUCTUANTE	72
16.3	CIBLE RAPIDEMENT FLUCTUANTE – RADAR ALEATOIRE.....	78
16.4	CONSIDERATIONS PRATIQUES – LOIS EMPIRIQUES	81
17	RECAPITULATION EMPLOI PRATIQUE DES RESULTATS	83
17.1	CIBLE NON FLUCTUANTE n ECHOS	83
17.2	CIBLE FLUCTUANTE RADAR MONOFREQUENCE n ECHOS.....	83
17.3	CIBLE FLUCTUANTE, DIVERSITE DE FREQUENCE, PUIS POST - INTEGRATION.....	83
17.4	CIBLE FLUCTUANTE, FREQUENCE VARIABLE A CHAQUE EMISSION N ECHOS	84
17.5	FONCTIONNEMENT EN SEQUENCES.....	84
17.6	UTILISATION DES LOIS SIMPLIFIEES.....	85
18	CALCULATEUR DE RAPPORT SIGNAL SUR BRUIT	85
18.1	RADAR A FREQUENCE FIXE	85
18.2	RADAR DIVERSITE	86
18.3	RADAR ALEATOIRE	86
18.4	SEQUENCES	87
18.5	SYNTHESE : NOTATION SWERLING DES CAS DE FLUCTUATION	87
19	NOTIONS SUR LES TRAITEMENTS PAR EXTRACTEURS.....	88
19.1	GENERALITES	88
19.2	EXEMPLE D'ORGANISATION DE MEMOIRE	88
19.3	EFFET DE L'EXTRACTION SUR LA FAUSSE ALARME	89
19.4	CALCUL DE P_d SI LES ECHOS SONT INDEPENDANTS.....	90
19.5	CAS OU LES ECHOS NE SONT PAS INDEPENDANTS.....	90
19.6	RECAPITULATION EMPLOI PRATIQUE DES RESULTATS	100
20	LEXIQUE DES TABLES ET PLANCHES	103

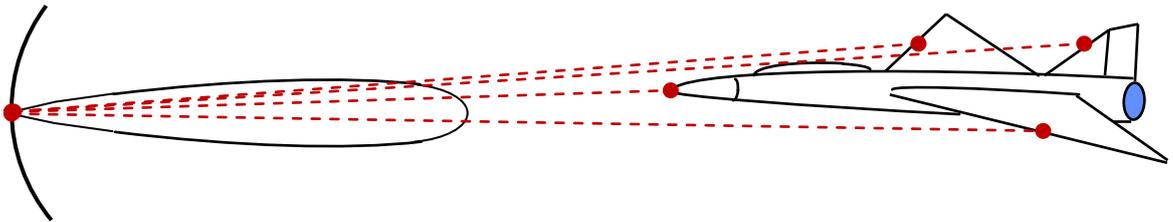
12 INFLUENCE DE LA FLUCTUATION DES CIBLES

Dans le paragraphe précédent, nous nous sommes placés dans le cas où l'énergie renvoyée par la cible ne variait pas d'une impulsion à la suivante, ce qui permettait de considérer comme une constante l'amplitude du signal perçu par le radar.

En réalité, les objets éclairés par le radar ont des formes très complexes qui font que l'énergie renvoyée par la cible varie suivant des conditions que nous allons tenter de définir.

12.1 MECANISME DE LA FLUCTUATION (CAS 1)

Une cible de forme complexe peut être considérée comme un ensemble de réflecteurs élémentaires, ou « *points brillants* » dont la position dans l'espace est liée à l'orientation de la cible.



Excités par l'onde, ces réflecteurs réfléchissent en direction du radar des signaux élémentaires qui, vus du radar, s'écrivent :

$$s_e = \varepsilon \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

- ε dépend de la nature et du réflecteur et peut varier avec l'orientation de la cible.
- φ dépend du retard dû au trajet de l'onde et de la fréquence émise : $\varphi = -\omega \cdot \Delta t$.

On peut considérer que φ est une variable équirépartie entre 0 et 2π . On peut donc écrire ces signaux élémentaires sous la forme :

$$s_e = \varepsilon_x \cos \omega t + \varepsilon_y \cos(\omega t + \pi/2)$$

expression dans laquelle ε_x et ε_y sont des variables aléatoires pouvant être positives ou négatives suivant la valeur de φ . Si φ est équirépartie entre 0 et 2π , ε_x et ε_y ont autant de chances d'être positifs que négatifs.

Le signal total renvoyé par la cible sera dans ces conditions :

$$S(t) = \sum \varepsilon_x \cos \omega t + \sum \varepsilon_y \cos(\omega t + \pi/2)$$

Si le nombre de points brillants participant à la réflexion est suffisamment élevé, et si aucun d'entre eux ne peut être considéré comme prépondérant, il est réaliste de considérer que $\sum \varepsilon_x$ et $\sum \varepsilon_y$, tendent vers une loi de Gauss de valeur moyenne nulle. Nous supposons, en outre, que la puissance portée par chaque composante du signal est la même, ce qui paraît logique à priori. Donc :

$$S(t) = X \cos \omega t + Y \cos(\omega t + \pi/2)$$

Avec :

$$f_{(x)} = \frac{1}{\sigma_s \sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma_s^2}$$

$$f_{(y)} = \frac{1}{\sigma_s \sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2\sigma_s^2}$$

Nous retrouvons ici une expression de même forme que celle déjà rencontrée pour le bruit ce qui permet d'en déduire des propriétés intéressantes :

La puissance réémise en moyenne par la cible est sous porteuse égale à σ_s^2 . Nous la choisirons comme référence pour le signal et poserons :

$$S = \sigma_s^2.$$

Par ailleurs, la puissance du signal réfléchi par la cible peut s'écrire à chaque instant en moyenne fréquence :

$$W = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2) = \frac{1}{2}\rho^2$$

Elle suit donc une loi de Laplace de la forme :

$$f_1(w) = \frac{1}{S} e^{-\frac{w}{S}}$$

Après détection quadratique on obtient un signal :

$$Z = X^2 + Y^2$$

Qui suit donc une loi de Laplace de la forme :

$$f_1(z) = \frac{1}{2S} e^{-\frac{z}{2S}}$$

On note par ailleurs que l'amplitude du signal réfléchi par la cible suit une loi normale circulaire ou loi de Rayleigh de la forme :

$$g(\rho) = \frac{\rho}{S} e^{-\frac{\rho^2}{2S}}$$

Ce modèle de fluctuation de cible dit de **Rayleigh** est l'un des modèles les plus utilisés en théorie du radar. Il est également connu sous le nom de **Swerling 1**.

12.2 SECOND MODELE DE FLUCTUATION (CAS 2)

Le modèle précédent est quelquefois considéré comme plus pessimiste que la réalité, surtout par les fabricants de radar, il est cependant très utilisé car donnant dans de nombreux cas des résultats proches de la réalité sur les cibles usuelles, il est vrai de formes complexes favorisant la multiplicité des points brillants.

Pour des cibles de formes plus simples, dont les cibles furtives pour lesquelles la réduction de surface équivalente va de pair avec une diminution du nombre de points brillants, un autre modèle de fluctuation peut être réalistement utilisé, il s'agit du **modèle dit de Swerling 3** qui propose comme loi de fluctuation en puissance la loi citée au paragraphe 6.6, soit en moyenne fréquence :

$$f_2(w) = \frac{4w}{S^2} e^{-\frac{2w}{S}}$$

de moyenne S mais de variance $S^2/2$ au lieu de S^2 pour la loi de Laplace utilisée dans le premier cas, donc **modèle représentatif d'une fluctuation plus faible**.

12.3 PROBABILITE DE FAUSSE ALARME

En absence de signal, la loi de probabilité du bruit n'est pas modifiée, on peut donc toujours écrire :

$$P_{fa} = \exp\{-k\}$$

ou :

$$k = -\ln(p_{fa})$$

si on normalise le bruit, comme dans le cas des cibles non fluctuantes tel que : $m = 2 B = 1$

12.4 PROBABILITE DE DETECTION - CAS 1

Lorsque le signal et le bruit sont en présence, nous trouvons en moyenne deux signaux :

- le signal utile : $S(t) = X \cos \omega t + Y \cos(\omega t + \pi/2)$,
où X et Y sont des variables gaussiennes centrées d'écart type $\sigma_s = S^{0.5}$
- le bruit : $b(t) = \alpha \cos \omega t + \beta \cos(\omega t + \pi/2)$ où α et β sont des variables gaussiennes centrées d'écart type $\sigma = B^{0.5}$

Le signal composite s'écrira donc :

$$S_c(t) = X_c \cos \omega t + Y_c \cos(\omega t + \pi/2)$$

où X_c et Y_c sont deux variables gaussiennes centrées d'écart type :

$$\sigma_c = \sqrt{\sigma_s^2 + \sigma^2} = \sqrt{S+B}$$

On retrouve ici une forme analogue au bruit seul ce qui permet d'écrire directement qu'après détection quadratique le signal composite a pour densité de probabilité :

$$f_c(z) = \frac{1}{2(S+B)} e^{\frac{-z}{2(S+B)}}$$

Il nous faut maintenant normaliser cette relation dans le cas du bruit type pour lequel on a posé $2B = 1$. soit ; $2(S+B) = 2B(S/B+1) = S/B+1$. D'où :

$$f_c(z) = \frac{1}{(S/B+1)} e^{\frac{-z}{(S/B+1)}}$$

La probabilité de détection est la probabilité pour que le signal composite dépasse le seuil k :

$$p_d = \int_k^{\infty} \frac{1}{(S/B+1)} e^{\frac{-z}{(S/B+1)}} dz$$

$$\boxed{p_d = e^{\frac{-k}{S/B+1}} \quad p_{fa} = e^{-k} \quad \frac{S}{B} = 10 \log \left(\frac{\log(p_{fa})}{\log(p_d)} - 1 \right)}$$

Relation à retenir pour une cible fluctuant suivant la loi de **Rayleigh** ou modèle **Swerling 1**.

12.5 PROBABILITE DE DETECTION - CAS 2

La loi de probabilité du mélange signal plus bruit ne peut dans ce cas être explicité directement. Une approximation réaliste peut néanmoins être proposée, elle consiste à dire que c'est le signal qui impose sa fluctuation au mélange signal plus bruit dès qu'il est suffisamment fort.

On considérera donc avec cette approximation que le mélange signal plus bruit à la même loi que le signal seul, avec une variance $S+B$ soit en moyenne fréquence :

$$g(W) = \frac{4W}{(S+B)^2} \exp\left\{\frac{-2W}{(S+B)}\right\}$$

Le signal vu par le détecteur quadratique Z : carré de l'amplitude du signal, aura donc la même loi de fluctuation que W , avec Z : carré de l'amplitude du signal égale $2W$; donc de moyenne $2(S+B)$:

$$g_c(z) = \frac{4Z}{4(S+B)^2} \exp\left\{\frac{-2Z}{2(S+B)}\right\}$$

soit avec la norme $2B = 1$ retenue pour fixer le seuil de détection :

$$g_c(Z) = \frac{4Z}{(S/B+1)^2} \exp\left\{\frac{-2Z}{(S/B+1)}\right\}$$

La fonction de répartition de cette loi a été établie au paragraphe 8.2.3.d, elle s'écrit :

$$F(z) = 1 - \exp\left\{-\frac{2 \cdot z}{m}\right\} - \frac{2 \cdot z}{m} \exp\left\{-\frac{2 \cdot z}{m}\right\}$$

d'où : $p_d = P\{Z > k\} = 1 - F(k)$

$$p_d = \exp\left\{\frac{2k}{S/B+1}\right\} \cdot \left[1 + \frac{2k}{S/B+1}\right]$$

On rappelle que : $k = -\ln(p_{fa})$. La table de la loi : $p_d = e^{-v} (1+v)$, est donnée ci-après :

p_d	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,99
v	4,74	3,89	3,00	2,44	2,02	1,68	1,38	1,10	0,824	0,532	0,355	0,148

et on écrira : $v = \frac{2k}{S/B+1}$

$$\frac{S}{B} = 10 \log\left(\frac{2k}{v} - 1\right)$$

Cible fluctuante – 1 écho – cas 2

Ce cas de fluctuation correspond à l'hypothèse **Swerling 3**.

On retiendra comme domaine de bonne précision des résultats : $S/B > 3 \Rightarrow (5db)$ ce qui correspond environ à $k > 2v$.

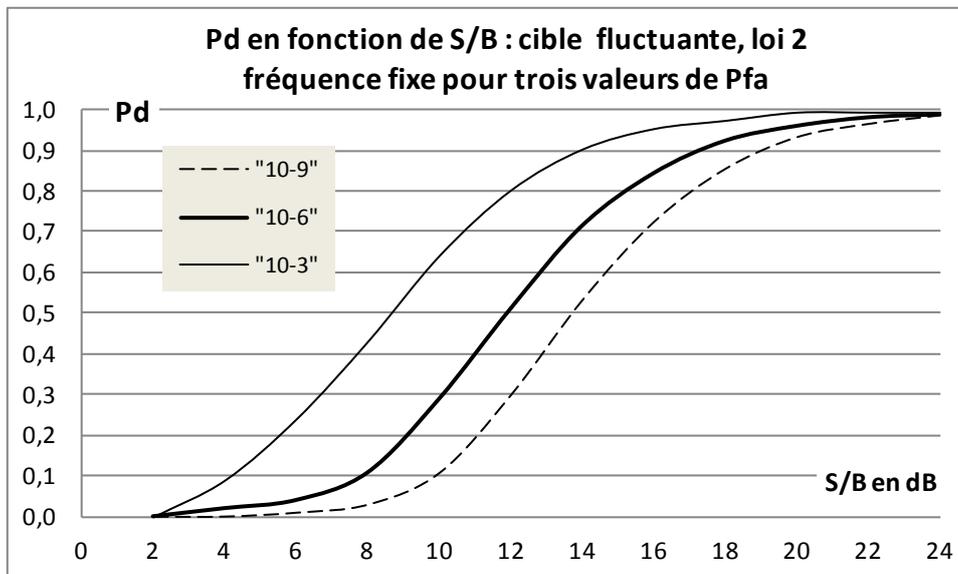
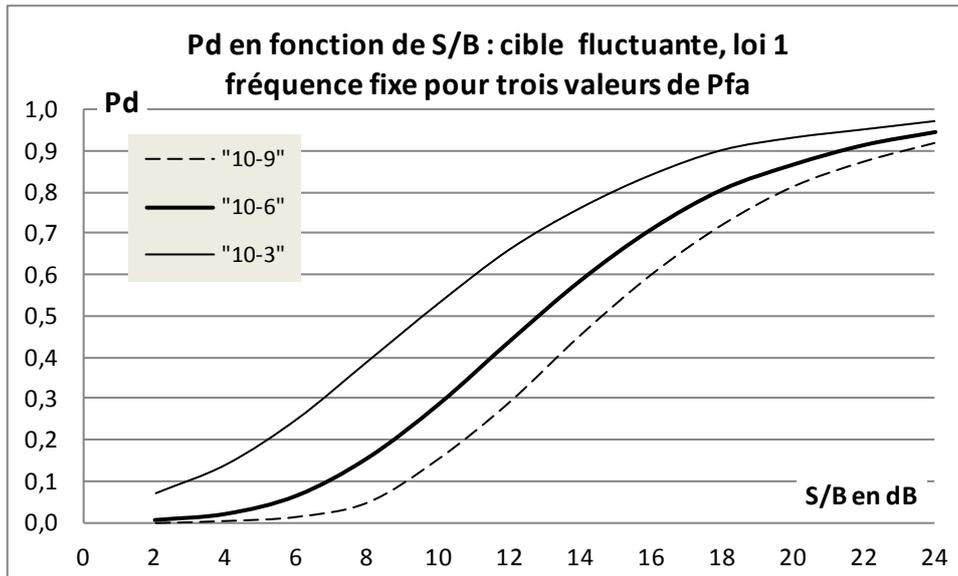
Les tables suivantes présentent les résultats obtenus dans les deux cas de fluctuation

Tableau 2 : Cible fluctuante, Loi 1, Swerling 1
(S/B)₁ un écho – par plot en fonction de p_d et p_{fa} en dB

$p_{fa} \backslash p_d$	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,99
10^{-1}					1,8	3,7	5,5	7,4	9,7	13,2	16,5	23,5
10^{-2}			2,7	4,5	6,0	7,5	9,0	10,8	12,9	16,3	19,5	26,6
10^{-3}	1,2	3,0	5,2	6,8	8,2	9,5	11,0	12,6	14,8	18,1	21,3	28,3
10^{-4}	3,2	4,8	6,7	8,2	9,6	10,9	12,3	13,9	16,0	19,4	22,5	29,6
10^{-5}	4,5	6,0	7,9	9,3	10,6	11,9	13,3	15,0	17,0	20,3	23,5	30,6
10^{-6}	5,6	7,0	8,8	10,2	11,5	12,8	14,2	15,8	17,8	21,1	24,3	31,4
10^{-7}	6,4	7,8	9,6	10,9	12,2	13,5	14,8	16,4	18,5	21,8	25,0	32,0
10^{-8}	7,1	8,4	10,2	11,6	12,8	14,1	15,4	17,0	19,1	22,4	25,5	32,6
10^{-9}	7,7	9,0	10,8	12,1	13,3	14,6	16,0	17,6	19,6	22,9	26,0	33,1
10^{-10}	8,2	9,5	11,2	12,6	13,8	15,1	16,4	18,0	20,1	23,4	26,5	33,6
10^{-11}	8,7	10,0	11,7	13,0	14,2	15,5	16,9	18,4	20,5	23,8	26,9	34,0
10^{-12}	9,2	10,4	12,1	13,4	14,6	15,9	17,2	18,8	20,9	24,2	27,3	34,4

Tableau 3 : Cible fluctuante – Loi 2 – Modèle Swerling 3
(S/B)₁ un écho – par plot en fonction de p_d et p_{fa} en dB

$p_{fa} \backslash p_d$	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,99
10^{-1}						2,4	3,7	5,0	6,6	8,8	10,8	14,8
10^{-2}			3,2	4,4	5,5	6,5	7,6	8,7	10,1	12,1	14,0	17,9
10^{-3}	2,8	4,1	5,6	6,7	7,7	8,6	9,6	10,6	12,0	14,0	15,8	19,6
10^{-4}	4,6	5,7	7,1	8,2	9,1	10,0	10,9	12,0	13,3	15,3	17,1	20,9
10^{-5}	5,9	6,9	8,3	9,3	10,2	11,0	12,0	13,0	14,3	16,3	18,0	21,9
10^{-6}	6,8	7,9	9,2	10,1	11,0	11,9	12,8	13,8	15,1	17,1	18,9	22,7
10^{-7}	7,6	8,6	9,9	10,9	11,7	12,6	13,5	14,5	15,8	17,8	19,5	23,3
10^{-8}	8,3	9,3	10,5	11,5	12,4	13,2	14,1	15,1	16,4	18,3	20,1	23,9
10^{-9}	8,9	9,9	11,1	12,0	12,9	13,7	14,6	15,7	16,9	18,9	20,6	24,4
10^{-10}	9,4	10,4	11,6	12,5	13,4	14,2	15,1	16,1	17,4	19,3	21,1	24,9
10^{-11}	9,9	10,8	12,0	13,0	13,8	14,7	15,5	16,5	17,8	19,7	21,5	25,3
10^{-12}	10,3	11,2	12,4	13,4	14,2	15,0	15,9	16,9	18,2	20,1	21,9	25,7



12.6 COMPARAISON DES RESULTATS

Il est intéressant de comparer les résultats obtenus sur une cible fluctuante pour les deux modèles de fluctuation et ceux calculés au paragraphe 1.1 dans le cas de la cible non fluctuante. Le graphique page suivante résume les résultats obtenus pour $p_{fa} = 10^{-6}$.

L'examen des résultats attire les remarques suivantes :

La détection des cibles fluctuantes est plus difficile que celle des cibles non fluctuantes aux probabilités de détection élevées.

En particulier, pour obtenir une probabilité de détection de 90% sur une seule impulsion, il faut fournir, toutes choses égales par ailleurs, une puissance de 4 à 8 dB supérieure si la cible est fluctuante ; cela vient rendre plus difficile leur détection par les radars.

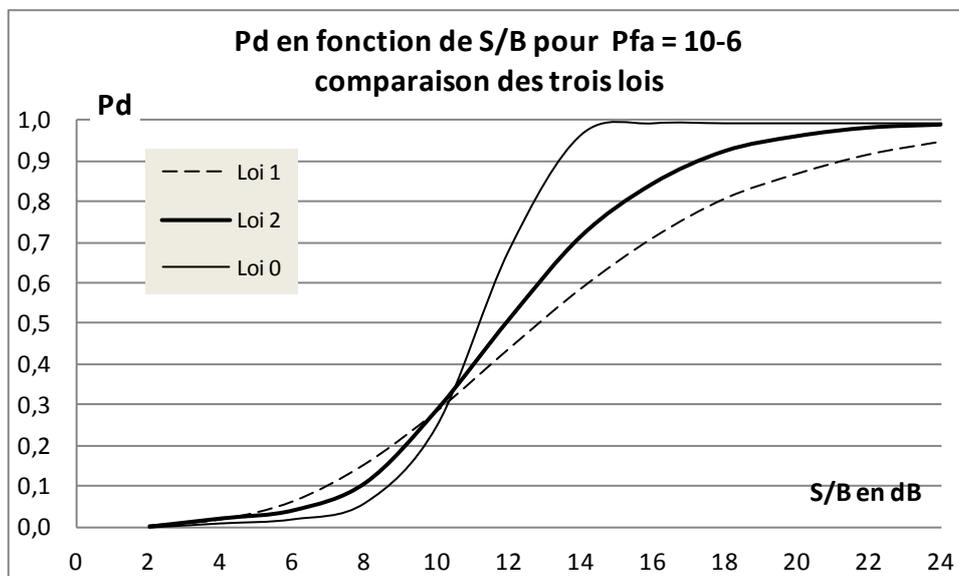
On remarque en outre que, pour les probabilités de détection faibles, le phénomène inverse se produit, quoique dans l'ensemble le bilan soit favorable à la cible non fluctuante.

Le résultat des mathématiques abstraites qui précèdent peut s'interpréter physiquement de la manière suivante :

- A rapport signal sur bruit moyen égal, le signal issu d'une cible fluctuante peut varier dans une grande dynamique.
- Même pour une valeur forte de S/B la probabilité de recevoir à un instant donné un signal faible n'est pas négligeable, ce qui vient limiter les possibilités de détection à forte probabilité.
- Inversement, pour une faible valeur de S/B , qui est, rappelons-le, une valeur moyenne dans ce cas, la probabilité de recevoir à un instant donné un signal fort n'est pas négligeable, ce qui favorise les faibles probabilités de détection.

Notons enfin, que la fluctuation des cibles peut provenir :

- des variations de positions relatives des points brillants de la cible, dues aux mouvements naturels de celle-ci (effet sur ΔT). C'est l'effet de fluctuation naturel de la cible dont la période est relativement lente (quelques secondes).
- des variations de ω à condition qu'elles soient suffisantes pour changer la composition des signaux élémentaires. Cette fluctuation volontaire est utilisée comme nous le verrons ci-après dans les radars à diversité et à fréquence aléatoire.



13 LUTTE CONTRE LA FLUCTUATION DES CIBLES

13.1 RETOUR SUR LE PHENOMENE DE FLUCTUATION

Nous venons de voir que la fluctuation des cibles venait perturber la détection de celles-ci en imposant un rapport S/B plus élevé pour l'obtention d'une probabilité de détection élevée.

Ceci venait du fait qu'à S/B donné même fort, le signal gardait une probabilité non nulle d'être faible. Pour lutter contre ce phénomène, on a eu l'idée de créer volontairement des signaux indépendants de manière que, si l'une des réponses de la cible est faible, les autres ne le soient pas forcément.

Dans ce but, on émet successivement des impulsions de fréquences variables et suffisamment différentes pour que la cible fluctue et forme donc une suite de signaux indépendants au niveau du radar.

Avant d'aborder l'étude mathématique du phénomène, nous allons tenter d'analyser physiquement les lois qui le régissent sur un modèle simplifié de cible fluctuante.

13.2 ANALYSE DE LA FLUCTUATION SUR UN MODELE SIMPLIFIE

Supposons une cible dont la surface équivalente moyenne est σ^0 et qui a :

- une chance sur deux d'être nulle,
- une chance sur deux de prendre la valeur $2\sigma_0$.

Dans ce cas, le rapport signal sur bruit moyen restant égal à S_0/B_0 aura :

- une chance sur deux d'être nul,
- une chance sur deux d'être égal à $2 S_0/B_0$

en appelant $p_d(S/B)$ la probabilité de détection d'une cible non fluctuante, nous pouvons écrire la probabilité de détection d'une telle cible :

$$p_d = \frac{1}{2}p_d(0) + \frac{1}{2}p_d(2S_0/B_0)$$

Connaissant la courbe $P_d \{S_0/B_0\}$, en fonction de S/B de la cible fixe, on peut en déduire la courbe P_d .

Le tableau suivant donne les résultats obtenus pour $p_{fa} = 10^{-6}$ (arrondis à 1% près)

S_0/B_0 dB	p_d cible non fluctuante	p_d cible fluctuante
8	0,03	0,21
10	0,26	0,4
12	0,6	0,49
14	0,97	0,5

Dans ce cas p_d ne peut dépasser 50 % (à $p_{fa}/2$ près, puisque $p(0) = p_{fa}$ quel que soit S/B).

On retrouve sur ce modèle simplifié les effets de la fluctuation des cibles :

- faibles probabilités de détection avantagées, lorsque l'effet de renforcement du signal domine,
- fortes probabilités désavantagées, lorsque l'effet d'affaiblissement du signal vient limiter la probabilité de détection.

Notons également que cette manière de voir permet d'établir une méthode indirecte de calcul de la probabilité de détection d'une cible fluctuante lorsque l'on connaît :

- l'expression de la probabilité de détection pour une cible non fluctuante,
- l'expression de la loi de fluctuation de la cible.

En effet, on peut généraliser la loi précédente en écrivant :

$$p_d = \sum_i P\{S/B = S_i/B_i\} \cdot P\{\text{de détection si } S/B = S_i/B_i\}$$

Cette méthode, applicable à la limite pour des fluctuations continues de la cible, a été souvent employée à l'origine. L'idée de calculer directement les lois de distribution du signal composite datant de 1966 (à la connaissance de l'auteur).

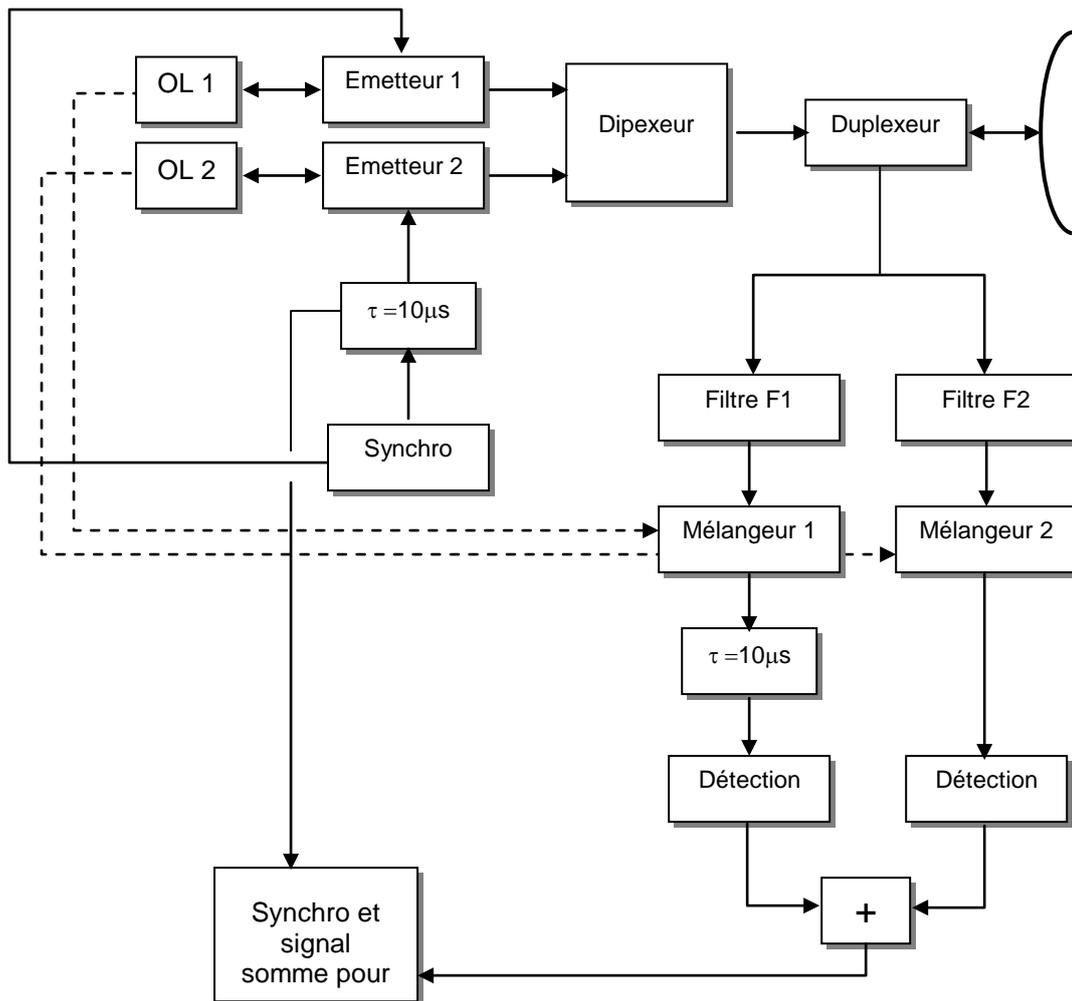
Nous ne la décrivons pas davantage, mais conserverons dans ce qui va suivre le modèle simplifié déjà utilisé, dans le but de mieux faire apparaître le mécanisme de la compensation de fluctuation des cibles en partant des résultats qui précèdent.

13.3 EFFET D'UNE DIVERSITE A DEUX FREQUENCES

Supposons un radar émettant la même puissance qu'un radar mono-fréquence mais en la divisant en deux parties :

- une moitié de la puissance à la fréquence F_1
- l'autre moitié à la fréquence F_2 .

Nous supposerons en outre F_1 et F_2 suffisamment éloignées pour qu'à un instant donné les réponses de la cible sur les deux fréquences puissent être considérées comme indépendantes.



L'émetteur « 1 » émet des impulsions à une cadence déterminée par un synchronisateur, par exemple des impulsions de $5\mu s$ aux instants :

$$0 - 5 \text{ ms} - 10 \text{ ms} \dots\dots\dots$$

L'émetteur « 2 » émet des impulsions de même durée et de même puissance crête à une fréquence F_2 différente de F_1 (100 MHz par exemple).

Son émission est décalée par rapport à l'émetteur 1 d'un temps fixe environ égal à deux fois la durée d'impulsion. Il émet donc des impulsions de $5\mu s$ aux instants :

0,01 – 5,01 ms – 10,01 ms

Ce décalage dans le temps est volontaire, il a pour but d'éviter que les circuits hyperfréquences soient parcourus à la fois par les deux impulsions, ce qui amènerait des pointes importantes de puissance (égales à $2P_c$ si $P_c/2$ est la puissance crête de chaque émetteur).

Ces signaux sont aiguillés vers l'antenne par un diplexeur et un duplexeur. À la réception, les signaux apparaissant sur la voie réception du duplexeur, sont triés à l'aide de filtres centrés sur les fréquences F_1 et F_2 , transposés en moyenne fréquence par des mélanges convenables dont la référence est fournie par les oscillateurs locaux OL1 ou OL2 associés aux émetteurs 1 et 2, remis en coïncidence de temps, détectés et sommés.

Nous supposons, (*ce qui est inexact comme nous le verrons plus loin, mais n'enlève rien à la valeur de l'exemple choisi*) que la sommation ne change pas la loi de probabilité du bruit et du signal composite, et que l'on peut relier le signal au bruit en appliquant la règle simple suivante :

- les bruits ne sont pas corrélés en position et s'additionnent « *en puissance* »
- les signaux coïncident en position et par le fait, voient leurs amplitudes s'ajouter.

Par cette méthode, nous reconstituerons les diverses valeurs de S/B et leurs probabilités d'apparition, et par application de la méthode définie au § 13.2 nous reconstituerons la probabilité de détection.

La puissance émise sur chaque voie étant la moitié de la puissance totale émise en 13.2, nous aurons sur chaque voie :

- un bruit de puissance B (*inchangée*),
- un signal pouvant prendre avec une probabilité de 0,5 les valeurs 0 et S_0 (*valeurs moitié de celles choisies en 13.2*).

Après sommation, nous trouverons : un bruit de puissance $2B_0$ et un signal pouvant prendre les amplitudes :

- 0 avec une probabilité de 0,25
- $\sqrt{S_0}$ avec une probabilité de 0,5
- $2\sqrt{S_0}$ avec une probabilité de 0,25

Après normalisation, par rapport au bruit sommé, nous aurons un rapport S/B pouvant prendre les valeurs :

- 0 avec une probabilité de 0,25
- $\frac{1}{2} S_0/B_0$ avec une probabilité de 0,5
- $2 S_0/B_0$ avec une probabilité de 0,25

et nous écrivons :

$$p_d = \frac{1}{2} p_d \left\{ \frac{1}{2} S_0/B_0 \right\} + \frac{1}{4} p_d \left\{ 2S_0/B_0 \right\}$$

Le résultat final est donné dans le tableau suivant :

S_0/B_0 dB	p_d cible fluctuante une fréquence	p_d diversité deux fréquences
8	0,21	0,1
10	0,4	0,21
12	0,49	0,31
14	0,50	0,46
18	0,50	0,74

On voit ici apparaître un redressement de la courbe $p_d(S_0/B_0)$ dû au fait que l'effet des valeurs extrêmes des puissances reçues est masqué par la diversité de fréquences, qui fait apparaître une valeur moyenne au détriment des valeurs extrêmes. Remarquons également que cette valeur moyenne est inférieure à S_0/B_0 valeur moyenne du rapport signal sur bruit sur une seule fréquence.

13.4 PASSAGE A LA LIMITE

Soit maintenant un radar du même type que précédemment, mais comportant un grand nombre n de voies.

Sur chaque voie nous aurons : un bruit de puissance B_0 et un signal pouvant prendre avec une probabilité de 0,5 :

- les puissances 0 ou $\frac{2S_0}{n}$, soit les amplitudes 0 ou $\sqrt{\frac{2S_0}{n}}$

Si n est suffisamment grand, on pourra dire qu'en moyenne :

- $n/2$ voies recevront un signal nul
- $n/2$ un signal d'amplitude $\sqrt{\frac{2S_0}{n}}$

L'amplitude moyenne du signal somme sera :

$$\frac{n}{2} \cdot \sqrt{\frac{2S_0}{n}} = \sqrt{\frac{n}{2} S_0}$$

la puissance de bruit : $n \cdot B_0$

Un tel radar verra donc un rapport signal sur bruit stable, si n est assez grand et de valeur :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{S}{B} \right)_n = \frac{1}{2} \frac{S_0}{B_0}$$

Ainsi donc à la limite, la diversité de fréquence annulerait la fluctuation de la cible, en faisant apparaître l'équivalent d'une cible de surface constante mais plus faible que la valeur moyenne de la cible détectée. Ce fait est d'autant plus intéressant que l'on recherche de fortes probabilités de détection.

14 CALCUL DIRECT DE L'EFFET DIVERSITE RADARS DIVERSITE ET ALEATOIRES

14.1 DIVERSITE A DEUX VOIES - CAS 1 DE FLUCTUATION

Nous avons vu aux paragraphes 11 et 12 les densités de probabilité du bruit et du signal fluctuant qui sont définies par :

- pour le bruit seul : $f_1(z) = e^{-z}$ (si le bruit est de puissance 1/2)
- pour le signal accompagné du bruit dans le premier cas de fluctuation :

$$f_2(z) = \frac{1}{S/B + 1} e^{-z/(S/B+1)}$$

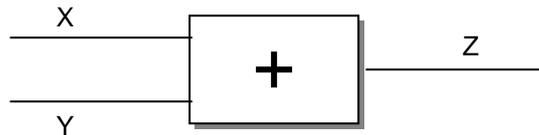
après détection par un détecteur quadratique.

Ces deux lois sont de même forme, nous pourrons donc étudier le comportement d'un signal aléatoire de loi de probabilité définie par une densité de probabilité :

$$f(\gamma) = \frac{1}{m} e^{-\gamma./m}$$

qui, suivant la valeur de m , pourra être identifié au signal ou au bruit.

Dans le cas de la diversité à deux fréquences, nous nous trouvons en présence de deux signaux de ce type ; le problème posé est de rechercher le comportement de leur somme.



Soient X et Y les deux signaux avant sommation, Z leur somme. X et Y ont comme densité de probabilité :

$$f_1(x) = \frac{1}{m} e^{-x/m} \quad (x \geq 0)$$

$$f_2(y) = \frac{1}{m} e^{-y/m} \quad (y \geq 0)$$

Le calcul de la probabilité de détection ou de fausse alarme se fera en appliquant la condition :

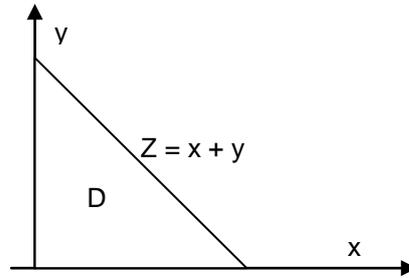
$$P_2 = P\{Z > \text{seuil}\}$$

ou probabilité pour que Z dépasse un seuil que nous désignerons par Z , c'est une fonction de Z

X , Y et Z sont des variables positives. Le calcul se simplifie si on passe par l'intermédiaire de la probabilité :

$$1 - P_2(z) = P\{Z < z\}$$

$$1 - P_2(z) = \iint_D \varphi(x, y) \cdot dx \cdot dy$$



Et comme X et Y sont indépendants :

$$\varphi(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y) = \frac{1}{m} \cdot e^{-x/m} \cdot \frac{1}{m} \cdot e^{-y/m}$$

d'où

$$1 - P_2(z) = \int_0^z \frac{1}{m} \cdot e^{-x/m} \cdot dx \int_0^{z-x} \frac{1}{m} \cdot e^{-y/m} \cdot dy$$

la deuxième intégrale est égale à :

$$\int_0^{z-x} \frac{1}{m} \cdot e^{-y/m} \cdot dy = \int_0^{(z-x)/m} e^{-u} \cdot du = 1 - e^{-(z-x)/m}$$

Nous écrivons donc directement :

$$1 - P_2(z) = \int_0^z \frac{1}{m} \cdot e^{-x/m} \cdot (1 - e^{-(z-x)/m}) \cdot dx$$

$$\begin{aligned} 1 - P_2(z) &= \int_0^z \frac{1}{m} \cdot e^{-x/m} \cdot dx - \int_0^z \frac{1}{m} \cdot e^{-z/m} \cdot dx \\ &= 1 - e^{-z/m} - \frac{z}{m} \cdot e^{-z/m} \end{aligned}$$

d'où :

$$P_2(z) = e^{-z/m} \left(1 + \frac{z}{m} \right)$$

NOTA : Si on se souvient que dans le cas d'une seule mesure on avait :

$$P_1(z) = P\{Z > z\} = \int_z^\infty e^{-x/m} dx$$

on remarquera que l'intégrale $\int_0^{z-x} \frac{1}{m} e^{-y/m} \cdot dy$ est l'expression de :

$$P\{Y \leq z - x\} = 1 - P\{Y > z - x\} = 1 - P_1(z - x)$$

ce qui permet d'écrire :

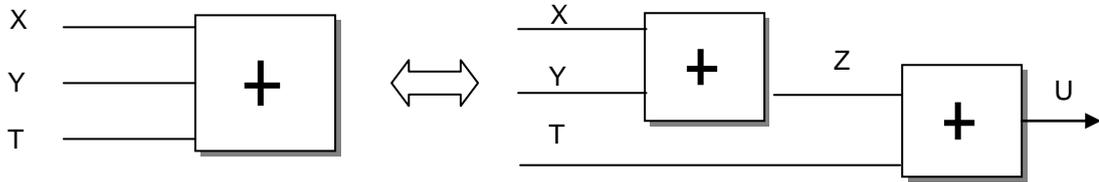
$$1 - P_2(z) = \int_0^z P\{x \leq X < x + dx\} \cdot P\{Y < z - x\}$$

$$1 - P_2(z) = \int_0^z \frac{1}{m} e^{-x/m} \cdot (1 - P_1(z - x)) dx$$

14.2 DIVERSITE A TROIS VOIES

Dans ce cas, le sommateur reçoit trois variables aléatoires X, Y et T et il nous faut étudier le comportement de leur somme U. Ce calcul peut être effectué à partir des résultats du paragraphe précédent en posant :

$$U = Z + T$$



Nous écrivons donc compte tenu de la remarque précédente :

$$1 - P_3(u) = \int_0^u P\{T = t\} \cdot P\{Z < u - t\}$$

soit :

$$1 - P_3(u) = \int_0^u \frac{1}{m} e^{-t/m} (1 - P_2(u - t)) dt$$

car la loi de probabilité de T est la même que celle de X et Y soit :

$$f(t) = \frac{1}{m} \cdot e^{-t/m}$$

$$1 - P_3(u) = \int_0^u \frac{1}{m} e^{-t/m} \left[1 - e^{-(u-t)/m} \cdot \left(1 + \frac{u-t}{m} \right) \right] \cdot dt$$

$$1 - P_3(u) = \int_0^u \frac{1}{m} e^{-t/m} \cdot dt - \int_0^u \frac{1}{m} \cdot e^{-u/m} \cdot \left(1 + \frac{u}{m} - \frac{t}{m} \right) \cdot dt$$

$$1 - P_3(u) = 1 - e^{-u/m} - \frac{1}{m} e^{-u/m} \left(u + \frac{u^2}{m} - \frac{u^2}{2m} \right)$$

d'où :

$$P_3(u) = e^{-u/m} \left(1 + \frac{u}{m} + \frac{1}{2} \left(\frac{u}{m} \right)^2 \right)$$

14.3 DIVERSITE A QUATRE VOIES

En reprenant le raisonnement précédent, nous écrivons :

$$W = U + V$$

$$1 - P_4(w) = \int_0^w \frac{1}{m} e^{-v/m} \cdot dv \left[1 - e^{-(w-v)/m} \left(1 + \frac{w-v}{m} + \frac{1}{2} \left(\frac{w-v}{m} \right)^2 \right) \right]$$

$$1 - P_4(w) = \int_0^w \frac{1}{m} e^{-v/m} \cdot dv - \frac{e^{-w/m}}{m} \int_0^w \left(1 + \frac{w-v}{m} + \frac{1}{2} \left(\frac{w-v}{m} \right)^2 \right) \cdot dv = I_1 + I_2$$

Pour calculer la seconde intégrale, posons :

$$\alpha = w - v \quad dv = -d\alpha$$

si : $v = 0 \rightarrow \alpha = w$; si : $v = w \rightarrow \alpha = 0$, il vient donc :

$$I_1 = 1 - e^{-w/m}$$

$$I_2 = -\frac{e^{-w/m}}{m} \int_0^w \left(1 + \frac{\alpha}{m} + \frac{\alpha^2}{2m^2} \right) d\alpha$$

et :

$$1 - P_4(w) = 1 - e^{-w/m} \left(1 + \frac{w}{m} + \frac{w^2}{2 \cdot m^2} + \frac{w^3}{2 \cdot 3 \cdot m^3} \right)$$

d'où :

$$P_4(w) = e^{-w/m} \left(1 + \frac{w}{m} + \frac{1}{2} \left(\frac{w}{m} \right)^2 + \frac{1}{2 \cdot 3} \left(\frac{w}{m} \right)^3 \right)$$

14.4 CAS DE N ENTREES

La méthode de calcul du paragraphe 14.3 permet le passage à n entrées.

En effet, la première intégrale est égale à : $1 - e^{-x/m}$ dans tous les cas.

La seconde intégrale prend les valeurs :

$$0 \text{ pour } n = 1$$

$$-e^{-w/n} \left(\frac{w}{m} \right) \text{ pour } n = 2$$

$$-e^{-w/m} \left(\frac{w}{m} + \frac{1}{2} \left(\frac{w}{m} \right) \right)^2 \text{ pour } n = 3$$

$$-e^{-w/n} \left(\frac{w}{m} + \frac{1}{2} \left(\frac{w}{m} \right)^2 + \frac{1}{2 \cdot 3} \left(\frac{w}{m} \right)^3 \right) \text{ pour } n = 4$$

et la méthode de calcul exposée fait bien apparaître un terme général de la forme :

$$\frac{1}{q!} \left(\frac{w}{q} \right)^q$$

Ces considérations nous permettront de généraliser et d'écrire la relation pour n entrées :

$$P_n(z) = e^{-z/m} \left(1 + \frac{z}{m} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{m} \right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{z}{m} \right)^3 \dots \dots \dots + \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{z}{m} \right)^{n-1} \right)$$

14.5 APPLICATION AU PREMIER CAS DE FLUCTUATION

Dans le cas où seul le bruit est présent, $m = 1$. z est alors le niveau du seuil placé pour limiter la fausse alarme, pris égal à k dans le cas de la détection sur un seul signal ; pour unifier les écritures nous poserons :

$$z = k_n$$

P_n est la probabilité de fausse alarme ou probabilité pour que la somme de n bruits dépasse le seuil k_n .

Nous pouvons donc écrire :

$$P_{fan} = e^{-k_n} \left(1 + k_n + \frac{k_n^2}{2} + \dots + \frac{k_n^{n-1}}{(n-1)!} \right)$$

Dans le cas du signal composite $z = k_n$ puisque le seuil reste inchangé, et $m = S/B + 1$, expression dans laquelle S/B est le rapport signal/ sur bruit dans chaque voie.

Nous poserons :

$$u_n = \frac{k_n}{S/B + 1}$$

et dans ce cas, l'expression de la probabilité de détection ou probabilité pour que la somme des n signaux mélangés au bruit dépasse le seuil k_n , sera :

$$P_{dn} = e^{-u_n} \left(1 + u_n + \frac{u_n^2}{2} + \dots + \frac{u_n^{n-1}}{(n-1)!} \right)$$

Les tableaux 4 et 5 donnant les valeurs de k_n et u_n en fonction de n , P_{fan} et P_{dn} sont donnés pages suivantes.

Leur mode d'emploi est le suivant :

a - Radar diversité n_v voies – Cas 1

On pose ici : $n = n_v$, nombre de voies diversité, et $k_n = k_{nv}$ par analogie.

Le tableau 4 donne la valeur de k_{nv} en fonction de P_{fa} et de n_v

Le tableau 5 donne la valeur de U_{nv} en fonction de P_{dn} et n_v .

Le rapport signal sur bruit par voie, nécessaire pour tenir les performances imposées, est alors si n_v est le nombre de voies :

$$(S/B)_{nv} = \frac{k_{nv}}{u_{nv}} - 1$$

On exprime généralement S/B en décibels.

D'où le rapport signal sur bruit par voie, nécessaire pour atteindre les valeurs fixées de p_d et p_{fa} , avec un radar diversité, dans le premier cas de fluctuation :

$$(S/B)_{nv} = 10 \cdot \log \left(\frac{k_{nv}}{u_{nv}} - 1 \right)$$

Par ailleurs, il revient au même de disposer simultanément de n_v voies émettant des fréquences différentes ou d'émettre successivement n impulsions à des fréquences différentes (une seule fréquence à la fois), ce qui amène au cas suivant du radar aléatoire.

b - Radar aléatoire n échos – Cas 1

Le nombre d'échos traité étant n , la lecture de k_n , (tableau 4) et de u_n (tableau 5) amène au calcul du rapport signal sur bruit par écho dans le premier cas de fluctuation, par l'application de la relation :

$$\left(\frac{S}{B}\right)_e = 10 \log \left(\frac{k_n}{u_n} - 1 \right)$$

Les résultats ainsi obtenus correspondent au modèle dit de **Swerling 2**.

La sommation des échos exige alors la mémorisation du signal pendant la durée d'une récurrence radar. Le procédé le plus simple utilise la rémanence des scopes PPI.

On peut également utiliser des procédés numériques faisant appel à des extracteurs particuliers, qui codent l'amplitude du signal reçu et le mettent en mémoire dans des « cases distance » avant sommation et comparaison à un seuil de fausse alarme.

14.6 APPLICATION AU DEUXIEME CAS DE FLUCTUATION

En se référant aux paragraphes 12.5 et 8.2.3.4 on remarque que, avec l'approximation choisie, la loi de fluctuation adoptée dans le second cas est celle de la somme de deux variables aléatoires suivant une loi de LAPLACE. Le mécanisme des additions successives des échos est donc le même que précédemment une somme de n échos type 2 étant équivalente à une somme de $2n$ échos de type 1 de moyenne $M = m/2$.

D'où en posant :

$$v_n = \frac{2k_n}{S/B+1} \quad P_{dn} = e^{-v_n} \left(1 + v_n + \frac{v_n^2}{2} + \dots + \frac{v_n^{2n-1}}{(2n-1)!} \right)$$

Le tableau 6 donnant les valeurs de v_n en fonction de n et P_{dn} est donné page suivante.

a - Radar diversité n_v voies – Cas 2

Le tableau 4 donne la valeur de k_{nv} en fonction de P_{fa} et de n_v . Le tableau 6 donne la valeur de v_{nv} en fonction de P_d et n_v . Le rapport signal sur bruit par voie pour un radar diversité, nécessaire dans le second cas de fluctuation s'écrit alors :

$$\left(\frac{S}{B}\right)_{nv} = 10 \cdot \log \left(\frac{2k_{nv}}{v_{nv}} - 1 \right)$$

b - Radar aléatoire n échos – Cas 2

La lecture de k_n (tableau 4) et v_n (tableau 6) amène en fonction du nombre d'échos traités au calcul du rapport signal sur bruit par écho dans le second cas de fluctuation, par l'application de la relation :

$$\left(\frac{S}{B}\right)_e = 10 \cdot \log \left(\frac{2k_n}{v_n} - 1 \right)$$

Les résultats ainsi obtenus correspondent au modèle dit de **Swerling 4**.

TABLEAU 4

Bruit

 k_n en fonction de P_{fa} et de n

n ou n_v \ P_{fan}	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-8}	10^{-10}
1	2,30	4,61	6,91	9,21	11,5	13,8	18,4	23,0
2	3,89	6,64	9,23	11,8	14,2	16,7	21,5	26,3
3	5,32	8,41	11,2	13,9	16,6	19,1	24,2	29,1
4	6,68	10,0	13,1	15,9	18,7	21,4	26,6	31,7
5	7,99	11,6	14,8	17,8	20,6	23,4	28,8	34,1
6	9,27	13,1	16,5	19,6	22,5	25,4	31,0	36,3
7	10,5	14,6	18,1	21,3	24,4	27,3	33,0	38,5
8	11,8	16,0	19,6	23,0	26,1	29,2	35,0	40,6
9	13,0	17,4	21,2	24,6	27,8	31,0	36,9	42,6
10	14,2	18,8	22,7	26,2	29,5	32,7	38,8	44,6
12	16,6	21,5	25,6	29,3	32,8	36,1	42,4	48,5
14	19,0	24,1	28,4	32,3	36,0	39,4	46,0	52,2
16	21,3	26,7	31,2	35,3	39,0	42,6	49,4	55,7
18	23,6	29,3	34,0	38,2	42,1	45,8	52,7	59,2
20	25,9	31,8	36,7	41,0	45,0	48,8	55,9	62,7
24	30,5	36,8	42,0	46,6	50,8	54,8	62,3	69,3
28	35,0	41,8	47,2	52,1	56,5	60,7	68,5	75,7
32	39,4	46,6	52,4	57,4	62,1	66,4	74,5	82,0
36	43,9	51,4	57,4	62,7	67,5	72,0	80,4	88,2
40	48,3	56,2	62,4	67,9	72,9	77,5	86,2	94,2
48	57,1	65,6	72,3	78,1	83,4	88,4	97,5	106
56	65,8	74,9	82,0	88,2	93,8	99,0	109	117
64	74,4	84,1	91,6	98,1	104	109	119	129
72	83,1	93,2	101	108	114	120	130	140
80	91,7	102	111	118	124	130	141	151

TABLEAU 5
Cible fluctuante Cas 1

$$U_n = \frac{k_n}{S/B+1} \text{ en fonction de } P_d \text{ et de } n$$

P_{dn} n ou n_v	0,2	0,3	0,5	0,7	0,8	0,9	0,95	0,99
1	1,61	1,20	0,693	0,357	0,223	0,105	0,051	0,010
2	2,99	2,44	1,68	1,10	0,824	0,532	0,355	0,148
3	4,28	3,62	2,67	1,91	1,53	1,10	0,818	0,435
4	5,51	4,76	3,67	2,76	2,30	1,75	1,37	0,821
5	6,72	5,89	4,67	3,63	3,09	2,43	1,97	1,28
6	7,91	7,01	5,67	4,52	3,90	3,15	2,61	1,78
7	9,08	8,11	6,67	5,41	4,73	3,89	3,28	2,33
8	10,2	9,21	7,67	6,31	5,58	4,66	3,98	2,91
9	11,4	10,3	8,67	7,22	6,43	5,43	4,69	3,51
10	12,5	11,4	9,67	8,13	7,29	6,22	5,42	4,13
12	14,8	13,5	11,7	9,97	9,03	7,83	6,92	5,43
14	17,0	15,7	13,7	11,8	10,8	9,47	8,46	6,78
16	19,2	17,8	15,7	13,7	12,6	11,1	10,0	8,18
18	21,4	20,0	17,7	15,6	14,4	12,8	11,6	9,61
20	23,6	22,1	19,7	17,4	16,2	14,5	13,3	11,1
24	28,0	26,3	23,7	21,2	19,8	18,0	16,6	14,1
28	32,3	30,5	27,7	25,0	23,5	21,5	19,9	17,2
32	36,6	34,7	31,7	28,8	27,2	25,0	23,3	20,3
36	40,9	38,9	35,7	32,6	30,9	28,6	26,7	23,5
40	45,2	43,1	39,7	36,5	34,6	32,1	30,2	26,8
48	53,7	51,4	47,7	44,1	42,1	39,4	37,2	33,3
56	62,2	59,7	55,7	51,8	49,6	46,6	44,3	40,1
64	70,6	67,9	63,7	59,6	57,2	54,0	51,4	46,9
72	79,0	76,2	71,7	67,3	64,8	61,4	58,6	53,7
80	87,4	84,4	79,7	75,1	72,4	68,8	65,9	60,7

TABLEAU 6
Cible fluctuante Cas 2

$$v_n = \frac{2k_n}{S/B+1} \text{ en fonction de } P_d \text{ et de } n$$

P_{dn} n ou n_v	0,2	0,3	0,5	0,7	0,8	0,9	0,95	0,99
1	2,99	2,44	1,68	1,10	0,824	0,532	0,355	0,148
2	5,51	4,76	3,67	2,76	2,30	1,75	1,37	0,821
3	7,91	7,01	5,67	4,52	3,90	3,15	2,61	1,78
4	10,2	9,21	7,67	6,31	5,58	4,66	3,98	2,91
5	12,5	11,4	9,67	8,13	7,29	6,22	5,42	4,13
6	14,8	13,5	11,7	9,97	9,03	7,83	6,92	5,43
7	17,0	15,7	13,7	11,8	10,8	9,47	8,46	6,78
8	19,2	17,8	15,7	13,7	12,6	11,1	10,0	8,18
9	21,4	20,0	17,7	15,6	14,4	12,8	11,6	9,61
10	23,6	22,1	19,7	17,4	16,2	14,5	13,3	11,1
12	28,0	26,3	23,7	21,2	19,8	18,0	16,6	14,1
14	32,3	30,5	27,7	25,0	23,5	21,5	19,9	17,2
16	36,6	34,7	31,7	28,8	27,2	25,0	23,3	20,3
18	40,9	38,9	35,7	32,6	30,9	28,6	26,7	23,5
20	45,2	43,1	39,7	36,5	34,6	32,1	30,2	26,8
24	53,7	51,4	47,7	44,1	42,1	39,4	37,2	33,3
28	62,2	59,7	55,7	51,8	49,6	46,6	44,3	40,1
32	70,6	67,9	63,7	59,6	57,2	54,0	51,4	46,9
36	79,0	76,2	71,7	67,3	64,8	61,4	58,6	53,7
40	87,4	84,4	79,7	75,1	72,4	68,8	65,9	60,7
48	104	101	95,7	90,6	87,7	83,7	80,5	74,7
64	137	134	128	122	118	114	110	103

14.7 INTERPRETATION DES RESULTATS

En nous reportant au paragraphe 14.4 on peut écrire que la fonction de répartition de la somme de « n » variables suivant une loi de Laplace de moyenne M s'écrit :

$$F_n(z) = 1 - p_n(z) = 1 - \exp\left\{\frac{-z}{M}\right\} \left(1 + \frac{z}{M} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{M}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{z}{M}\right)^3 + \dots + \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{z}{M}\right)^{n-1} \right)$$

Elle admet comme dérivée :

$$g_n(z) = \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \left(\frac{1}{M}\right)^n \exp\left\{\frac{-z}{M}\right\}$$

La loi de la moyenne de « n » variables suivant une loi de Laplace s'en déduit en posant

$$M = m/n$$

Ce qui conduit à :

$$g_n(z) = \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \left(\frac{n}{m}\right)^n \exp\left\{\frac{-n.z}{m}\right\}$$

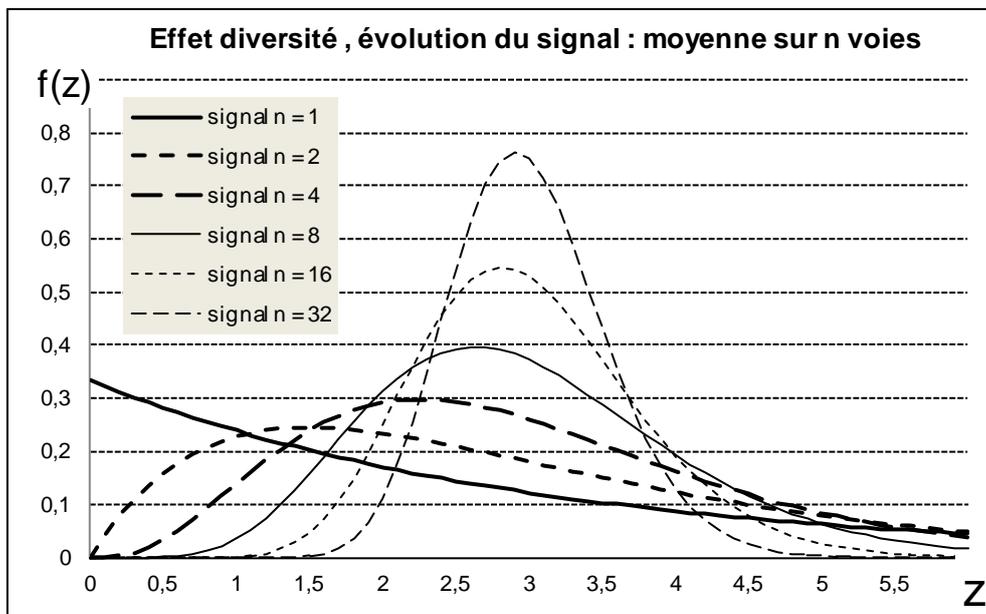
Densité de probabilité de la moyenne de « n » variables suivant une loi de Laplace de moyenne m_0 , que nous prendrons égale avec la normalisation retenue ($2B = 1$) à :

$$m = S/B + 1$$

pour le mélange signal plus bruit.

Le graphique suivant illustre les lois de probabilité obtenues pour un S/B moyen de 3dB, soit :

$$S/B + 1 = 3 :$$



On constate que ces lois se centrent autour de leur moyenne et que leur dispersion diminue lorsque le nombre de signaux pris en compte augmente, ce qui est bien représentatif d'une diminution de la fluctuation.

15 CONSEQUENCES SUR L'UTILISATION DU RADAR DIVERSITE

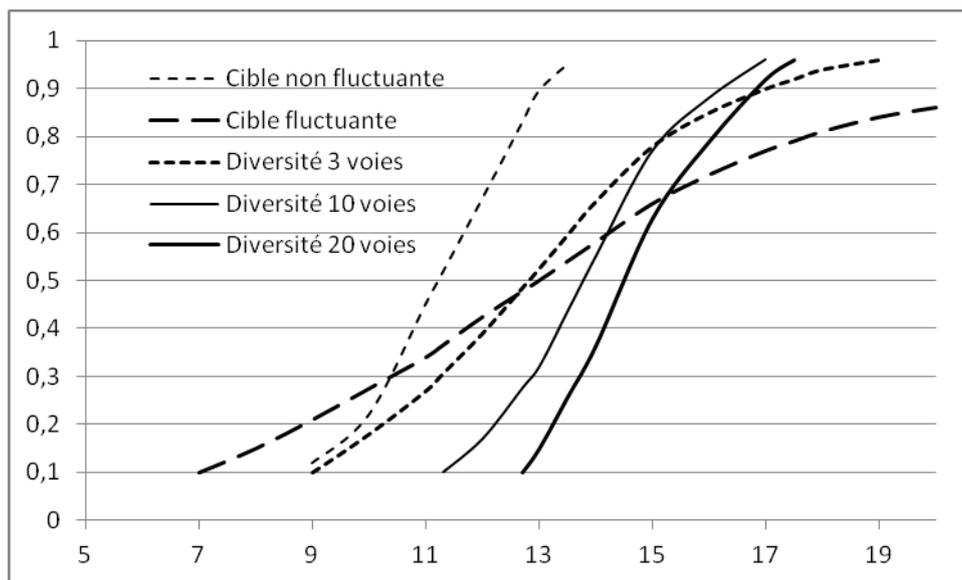
a - Résultats globaux

L'utilisation des tables peut nous permettre de retrouver avec précision, dans le cas d'une cible fluctuant selon les deux lois retenues, le gain apporté par un radar diversité de fréquence.

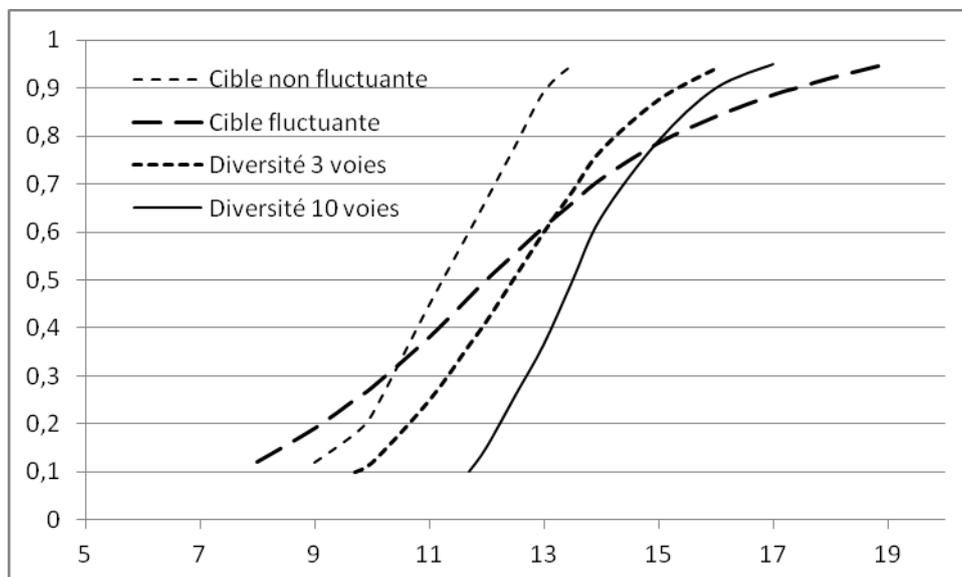
Les tables permettant de calculer directement le rapport signal sur bruit à adopter par voie ou rapport signal sur bruit élémentaire $(S/B)_{nv}$, nous multiplierons cette valeur par le nombre n_v de voie de manière à établir une comparaison directe avec un radar émettant une seule fréquence, pour calculer un rapport signal sur bruit moyen par écho radar

$$(S/B)_e = n_v (S/B)_{nv} =.$$

Le jeu de courbes suivant donne, dans les deux cas de fluctuation, l'allure des courbes P_d fonction de S/B pour $P_{fa} = 10^{-6}$.



CIBLE FLUCTUANTE – Loi 1



CIBLE FLUCTUANTE – Loi 2

Dans le premier cas de fluctuation, on constate que la diversité redresse la courbe P_d (S/B) qui est pratiquement parallèle à celle de la cible non fluctuante pour $n_v \geq 10$.

Cependant lorsque n croit cette courbe se décale ensuite dans le sens des S/B croissants. Ce phénomène est dû à l'addition des bruits de n voies qui est, une addition de signaux positifs possédant une composante continue, donc défavorable à la détection radar.

Dans le second cas de fluctuation, on constate que le phénomène s'accélère, la diversité redresse la courbe P_d (S/B) qui est pratiquement parallèle à celle de la cible non fluctuante dès que $n_v \geq 3$ et se décale ensuite dans le sens des S/B croissants.

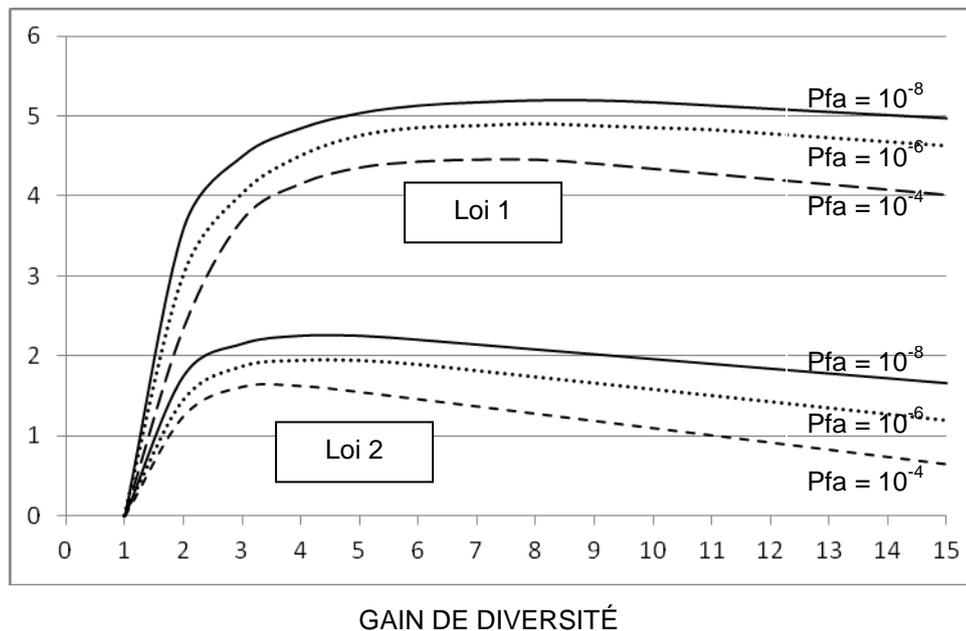
b - Gain de diversité, comparaison des deux lois

La gain de diversité est le gain sur la puissance totale à émettre par un radar diversité, avec comme référence la puissance émise dans le cas de la cible fluctuante vue par un radar émettant une seule fréquence.

Le second jeu de courbes ci après, donne une illustration du gain de diversité sur la puissance totale émise en fonction du nombre de voies pour $P_d = 0,9$.

Dans le premier cas de fluctuation le gain atteint 3 dB pour $n_v = 2$ (50% d'économie de puissance) et plafonne entre 4,4 et 5,2 dB (65 à 70% d'économie de puissance) pour $n_v = 7$. Au-delà de cette valeur le gain de diversité n'augmente plus, mais au contraire diminue quand n_v croît.

Dans le second cas de fluctuation le gain de diversité est beaucoup plus faible 1,6 à 2,2 dB pour $n_v = 4$, puis diminue également avec n_v .



Loi 1 : **Swerling 1**, voies indépendantes - Loi 2 : **Swerling 3**, voies indépendantes

En pratique, on limite le nombre de voies à 3, pour ne pas payer par la complexité du radar le gain de puissance d'émission, d'autant plus que cette complexité ne peut qu'entraîner des pertes dans la recombinaison des signaux qui viendraient rapidement diminuer le gain théorique précédent.

Le cas du radar aléatoire est plus complexe car il faut comparer ce radar à un radar à fréquence fixe émettant le même nombre n d'impulsions. Il sera examiné aux paragraphes 16.3.

16 L'INTEGRATION APRES DETECTION

Dans ce qui précède, nous avons examiné le cas de la détection radar sur une seule impulsion (*reconstituée par sommation des voies dans le cas du radar diversité*).

En réalité, le radar émet plusieurs impulsions dans la direction de la cible et la détection de la cible est facilitée par ce fait.

Plaçons-nous dans le cas d'un radar à impulsions émettant un signal toutes les 4 ms (fréquence de récurrence $f_R = 250$ Hz). La durée du signal émis sera prise égale à 4 μ s.

Une cible, placée à 300 km et se rapprochant du radar à la vitesse de 800 m/s, donnera des échos, comptés à partir de l'instant d'émission d'une première impulsion, de retard égal à :

$$2 \text{ ms} ; 6 \text{ ms} + \varepsilon ; 10 \text{ ms} + 2 \varepsilon ; \text{etc...}$$

Le décalage de temps ε est dû au déplacement de la cible ; en 4 ms ce déplacement est de :

$$4 \cdot 10^{-3} \times 800 \cong 3 \text{ m}$$

d'où :

$$\varepsilon \cong 2 \cdot 10^{-2} \mu\text{s}$$

ce qui est négligeable devant la durée de l'impulsion émise.

On peut donc considérer que l'instant d'apparition du signal compté à partir de l'impulsion d'émission qui précède est invariable pendant un grand nombre d'impulsions consécutives.

Par exemple pour un radar de veille d'ouverture de lobe en gisement $\theta_0 = 1,2^\circ$ et de vitesse de rotation d'aérien $\Omega = 36^\circ/\text{sec}$: le nombre d'impulsions vues lors d'un passage d'antenne s'écrit :

$$n = \frac{\theta_0 \cdot f_R}{\Omega} = \frac{1,2 \cdot 250}{36} \approx 8$$

Et le déplacement de la cible pendant cette mesure :

$$\varepsilon_t = 8 \cdot \varepsilon \cong 1,6 \cdot 10^{-1} \mu\text{s}$$

ce qui reste négligeable devant la durée de l'impulsion émise.

Cette propriété permettra d'intégrer les impulsions issues d'une même cible dans le but d'améliorer le rapport signal sur bruit global.

Cette intégration peut être faite grâce à la rémanence des scopes utilisés en radar, ce qui sous-entend une perte par rapport à l'intégrateur parfait, mais on peut réaliser des intégrateurs de très bon rendement sous forme numérique (*codage des amplitudes des signaux dans des « fenêtres » distance et sommation des amplitudes codées dans chaque fenêtre*).

Nous nous placerons dans le cas d'une intégration parfaite, et considérerons plusieurs variantes suivant le comportement de la cible.

16.1 CIBLE NON FLUCTUANTE

Lorsque la cible ne fluctue pas, et si l'on considère que le gain de l'aérien dans la direction radar-cible reste constant pendant toute la durée de la mesure, l'amplitude des n signaux intégrés reste constante et égale à A .

Le bruit, lui, donne naissance à une suite de n signaux fluctuants suivant une loi de Laplace :

$$f(x) = \frac{x}{m} e^{-x/m}$$

indépendants d'une récurrence à la suivante.

La sommation de n bruits a été traitée au paragraphe 14, et les valeurs du seuil k_n à imposer pour conserver une fausse alarme donnée, calculées pour : $m = 2\sigma^2 = 1$ restent applicables. Il ne reste donc à étudier que le comportement du signal composite, somme du signal utile et du bruit.

16.1.1 Sommation d'un grand nombre de signaux

Nous avons vu au paragraphe 11 que le signal composite s'écrit après détection quadratique :

$$\Gamma^2 = (A + \alpha)^2 + \beta^2$$

expression où :

- A = amplitude du signal,
- α = amplitude de la composante du bruit en phase avec le signal,
- β = amplitude de la composante du bruit en quadrature avec le signal.

α et β sont des variables aléatoires, gaussiennes, de valeur moyenne nulle et de variance $\sigma^2=1/2$ (pour $m = 1$).

Le signal après détection quadratique a pour amplitude :

$$Z = \Gamma^2 = A^2 + 2A\alpha + \alpha^2 + \beta^2 = A^2 + 2A\alpha + \rho^2$$

Après sommation de n signaux de ce type, on aboutira à un signal composite :

$$\sum Z_i = Z_1 + Z_2 \dots\dots\dots + Z_n$$

Ce signal sera composé de :

- la somme de n termes fixes d'amplitude A^2 soit : nA^2
- la somme de n variables gaussiennes indépendantes de variance : $4.A^2\sigma^2 = 2A^2$

$$2A\alpha_1 + 2A\alpha_2 \dots\dots\dots + 2A\alpha_n$$

qui sera une variable gaussienne ayant pour variance la somme de leurs variances

$$\sum \sigma_i^2 = n(A\sqrt{2})^2 = 2nA^2,$$

- la somme de n variables non gaussiennes mais indépendantes entre elles :

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 + \dots\dots\dots \rho_n^2$$

qui tendra donc vers une variable gaussienne ayant pour moyenne la somme de leurs moyennes, et pour variance la somme de leurs variances, soit, comme ρ^2 a pour moyenne 1 et pour variance 1 ($f(z) = \rho^2$; $m = 1$; $\sigma^2 = 1$; cf. § 6.4), vers une variable gaussienne, de moyenne = n fois celle de ρ^2 soit n et de variance = n fois celle de ρ^2 soit n .

Ces deux dernières variables peuvent être considérées comme indépendantes, quoique liées toutes deux à la variable aléatoire α ; en effet :

- $\sum 2A\alpha_i$ est la somme de termes positifs ou négatifs,

- $\sum \rho_i^2 = \sum \alpha_i^2 + \beta_i^2$ est la somme de termes positifs où α_i et β_i sont indépendants.

Les lois limites devraient être faiblement corrélées.

Dans cette hypothèse, le signal somme est une variable aléatoire gaussienne (*puisque somme de variables gaussiennes indépendantes*).

$$\text{de moyenne : } nA^2 + n = n(A^2 + 1)$$

$$\text{de variance : } 2nA^2 + n = n(2A^2 + 1)$$

d'où sa densité de probabilité :

$$g_n(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot n \cdot (2A^2 + 1)}} \exp \left\{ \frac{-(z - n \cdot (A^2 + 1))^2}{2n \cdot (2A^2 + 1)} \right\}$$

16.1.2 Validité aux faibles valeurs de n

Examinons la forme limite de cette loi pour $n = 1$:

$$g_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n(2A^2 + 1)}} \exp \left\{ \frac{-(z - (A^2 + 1))^2}{2(2A^2 + 1)} \right\}$$

C'est la loi de probabilité d'une variable aléatoire, gaussienne de moyenne $A^2 + 1$ et de variance $2A^2 + 1$, ce qui correspond à la somme :

- d'un terme constant A^2 ,
- d'une variable gaussienne de moyenne nulle et de variance $2A^2$,
- d'une variable gaussienne de moyenne 1 et d'écart type 1.

On retrouve ici la décomposition du signal élémentaire dans lequel le terme ρ^2 est remplacé par une variable de Gauss de même moyenne et de même écart type. Cette approximation est tolérable si ρ^2 est un terme faible devant les deux autres soit si $A \gg \rho$.

Le tableau suivant donne l'écart de rapport signal sur bruit (en dB) entre la loi adoptée au paragraphe 11.6 et la loi $g_1(z)$, pour $n = 1$:

$P_{fa} \backslash P_d$	0,5	0,8	0,9	0,95	0,99
10^{-2}	0,56	0,03	-0,32	-0,62	-1,16
10^{-3}	0,35	0,03	-0,21	-0,44	-0,86
10^{-4}	0,26	0,025	-0,16	-0,34	-0,68
10^{-6}	0,17	0,02	-0,11	-0,23	-0,49
10^{-8}	0,12	0,02	-0,08	-0,18	-0,39

On remarque que l'erreur est inférieure à 15% (0,6 dB) dans la plupart des cas.

Cette erreur décroissant avec n, on pourra considérer cette approximation comme raisonnable pour :

$$n \geq 2 \text{ et } P_{fa} \leq 10^{-2}$$

16.1.3 Calcul du rapport signal sur bruit

La loi $g_n(z)$ étant connue, le seuil à appliquer est celui déjà calculé sur la somme de n bruits, soit le k_n défini au paragraphe 14.

On pourra donc écrire :

$$P_d = \int_{k_n}^{\infty} g_n(z) dz$$

Nous avons :

$$g_n(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot n(2A^2 + 1)}} \cdot \exp\left\{ \frac{-(z - n(A^2 + 1))^2}{2n(2A^2 + 1)} \right\}$$

en posant :

$$x = \frac{z - n \cdot (A^2 + 1)}{\sqrt{n \cdot (2A^2 + 1)}}$$

il vient :

$$P_d = \int_{-t}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ \frac{-x^2}{2} \right\} \cdot dx$$

avec :

$$-t = \frac{k_n - n(A^2 + 1)}{\sqrt{n(2A^2 + 1)}}$$

les valeurs liant t à P_d sont alors celles du paragraphe 11.3. On se place dans le cas $P_d < 0.5$, ce qui entraîne $t > 0$. Donc :

$$n(A^2 + 1) - k_n \geq 0$$

On peut donc poser :

$$t = \frac{A^2 - \left(\frac{k_n}{n} - 1 \right)}{\sqrt{\frac{2A^2 + 1}{n}}} \geq 0$$

et après élévation au carré :

$$A^4 - 2A^2 \left(\frac{t^2}{n} + \frac{k_n}{n} - 1 \right) + \left(\frac{k_n}{n} - 1 \right)^2 - \frac{t^2}{n} = 0$$

soit en posant $A^2 = S/B$ avec $A^2 > k_n/n - 1$:

$$\boxed{\left(\frac{S}{B} \right)_n = \left(\frac{k_n}{n} - 1 \right) + \frac{t^2}{n} + \sqrt{\frac{t^2}{n} \left(\frac{2k_n}{n} - 1 + \frac{t^2}{n} \right)}}$$

expression valable pour $P_d > 0.5$

16.1.4 Calcul du gain de post intégration

Pour limiter les erreurs, sachant que la loi adoptée s'améliore avec n , nous conserverons comme référence la loi du paragraphe 11.6 :

$$\left(\frac{S}{B}\right)_1 = 10 \cdot \log\left(\frac{1}{2}(t + \sqrt{2k-1})^2\right)$$

que nous comparerons à la loi précédente pour : $n \geq 2$

$$\left(\frac{S}{B}\right)_n = 10 \cdot \log\left(\left(\frac{k_n}{n} - 1\right) + \frac{t^2}{n} + \sqrt{\frac{t^2}{n}\left(\frac{2k_n}{n} - 1 + \frac{t^2}{n}\right)}\right)$$

et nous écrirons :

$$g(S/B) = \left(\frac{S}{B}\right)_1 - \left(\frac{S}{B}\right)_n$$

Les valeurs de k_n sont celles du paragraphe 14.5.

Les valeurs de t sont celles du paragraphe 11.3 pour $P_d \geq 0,5$

P_d	0,5	0,8	0,9	0,95	0,99
t	0	0,84	1,28	1,65	2,33

16.1.5 Influence de la probabilité de détection

Dans le but d'évaluer l'influence de la probabilité de détection, une étude rapide pour :

$$10^{-2} > P_{fa} > 10^{-8} \text{ et } : 0,5 < P_d < 0,99$$

est présentée ci après pour $n = 10$, pour laquelle la loi $g_n(z)$ est réaliste.

$P_{fa} \backslash P_d$	0,5	0,8	0,9	0,95	0,99
10^{-2}	6,69	6,92	6,95	6,95	6,89
10^{-4}	7,30	7,48	7,52	7,52	7,48
10^{-6}	7,68	7,82	7,85	7,85	7,82
10^{-8}	7,93	8,05	8,08	8,08	8,05

Gains comparés de post-intégration : $n = 10$

Le tableau précédent montre que dans tous les cas, la variation du rapport signal sur bruit à fausse alarme donnée en fonction de la probabilité de détection, reste inférieure à 0,26 dB (6%). Nous pouvons donc considérer qu'en pratique le gain de post-intégration ne dépend pas de la probabilité de détection et généraliserons cette propriété pour tout n .

Par contre, la probabilité de fausse alarme à une incidence. Le tableau de la page suivante donne le gain de post-intégration en fonction de P_{fa} et de n pour une cible non fluctuante. Il a été calculé en fixant $P_d = 0,8$, valeur pour laquelle (Cf. § 16.1.2) les deux lois comparées se raccordent presque exactement pour : $n = 1$.

La validité de ce calcul peut être considérée comme acquise pour $P_{fa} < 10^{-2}$ et $P_d > 0,5$, sa précision est de l'ordre de 0,2 à 0,3 dB.

TABLEAU 7
Gain de post-intégration - Cible non fluctuante

$n \backslash P_{fa}$	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-8}	10^{-10}
1	0	0	0	0	0	0	0
2	2,2	2,3	2,4	2,5	2,5	2,6	2,6
3	3,4	3,6	3,8	3,9	3,9	4,0	4,1
4	4,3	4,5	4,7	4,8	4,9	5,0	5,1
5	4,9	5,2	5,4	5,5	5,6	5,8	5,9
6	5,5	5,8	6,0	6,1	6,2	6,4	6,5
7	5,9	6,2	6,4	6,6	6,7	6,9	7,1
8	6,3	6,6	6,8	7,0	7,1	7,3	7,5
9	6,6	6,9	7,2	7,4	7,5	7,7	7,9
10	6,9	7,2	7,5	7,7	7,8	8,0	8,2
12	7,4	7,7	8,0	8,2	8,4	8,6	8,8
14	7,8	8,2	8,5	8,7	8,8	9,1	9,3
16	8,2	8,6	8,8	9,0	9,2	9,5	9,7
18	8,5	8,9	9,2	9,4	9,6	9,9	10,1
20	8,8	9,2	9,5	9,7	9,9	10,2	10,4
24	9,3	9,7	10,0	10,2	10,4	10,7	10,9
28	9,7	10,1	10,4	10,6	10,8	11,1	11,3
32	10,0	10,4	10,8	11,0	11,2	11,5	11,7
36	10,3	10,7	11,1	11,3	11,5	11,8	12,0
40	10,6	11,0	11,4	11,6	11,8	12,1	12,4
48	11,1	11,5	11,9	12,1	12,4	12,7	13,0
56	11,5	11,9	12,3	12,5	12,8	13,1	13,4
64	11,8	11,2	12,6	12,9	13,2	13,5	13,8
72	12,1	12,5	12,9	13,2	13,5	13,8	14,1
80	12,3	12,7	13,1	13,4	13,7	14,0	14,3

16.1.6 Interprétation des résultats

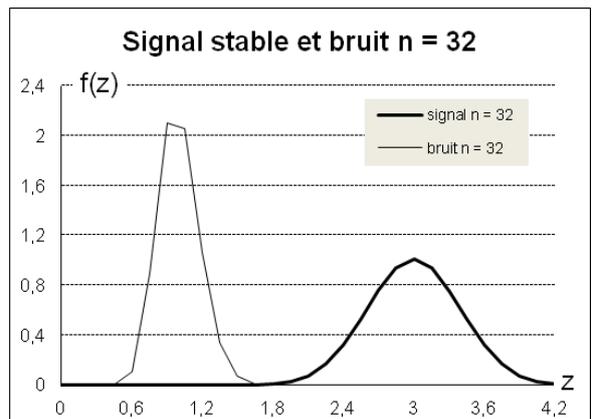
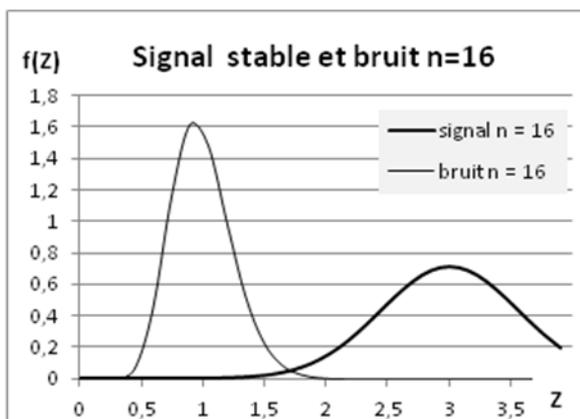
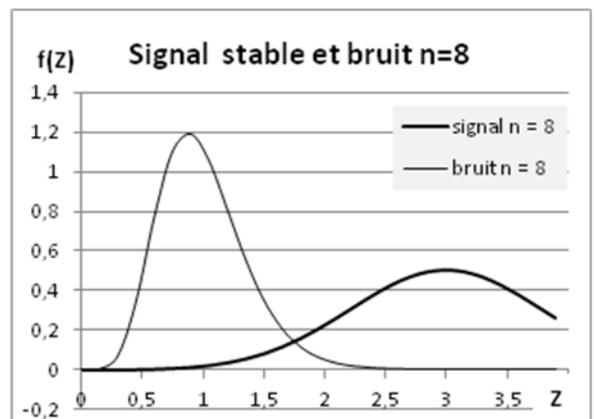
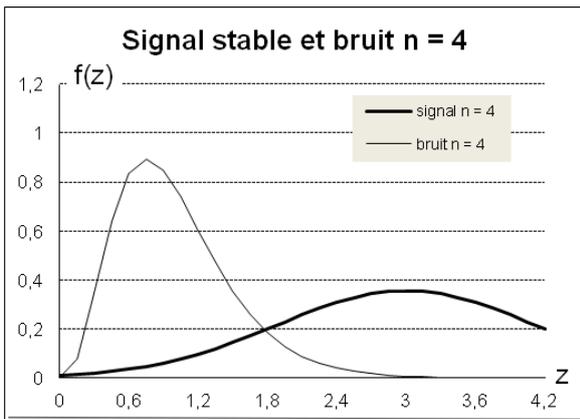
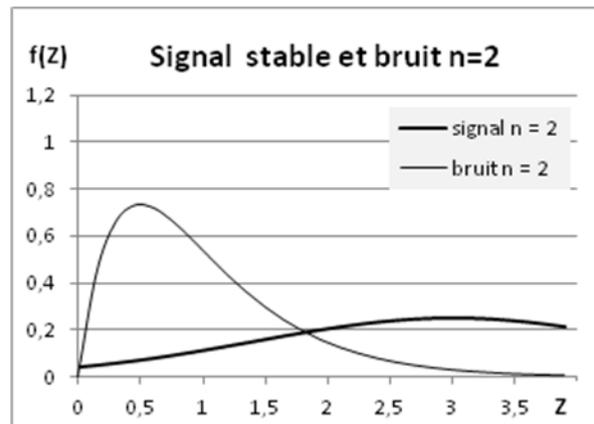
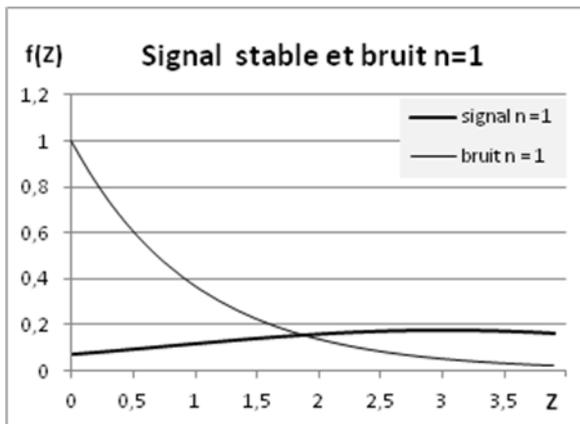
La relation établie au § 16.1.3 peut s'écrire, en posant $A^2 = S/B$ et en considérant la moyenne de n signaux (moyenne divisée par n et variance divisée par n^2)

$$g_n(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot (2S/B + 1)/n}} \cdot \exp\left\{ \frac{-(z - (S/B + 1))^2}{2(2S/B + 1)/n} \right\}$$

Par ailleurs on a établi au § 14.7 pour le bruit seul, la densité de probabilité (avec $m = 1$) :

$$g_n(z) = \frac{z^{n-1} \cdot n^n}{(n-1)!} \exp\{-n \cdot z\}$$

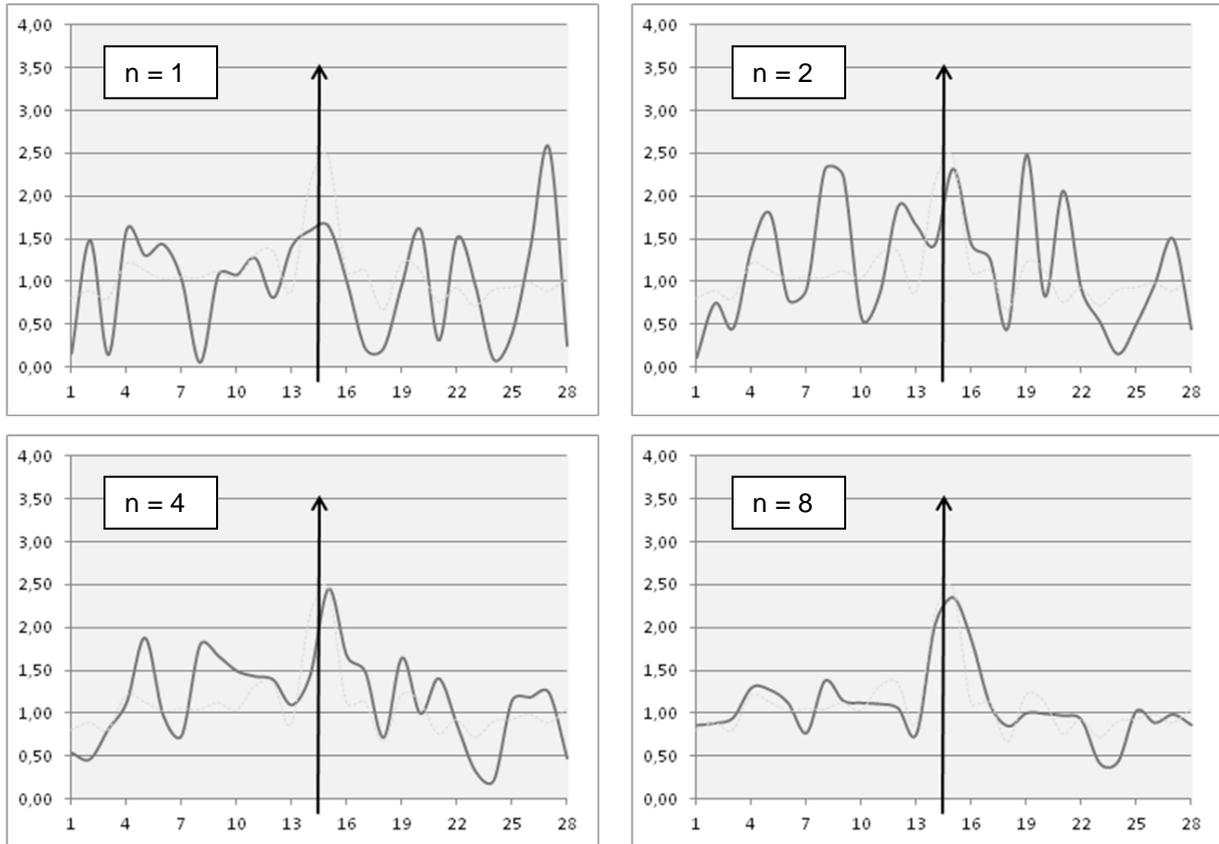
Les figures suivantes présentent ces densités de probabilité pour différentes valeurs de n :



DENSITE DE PROBABILITE DU SIGNAL ET DU BRUIT, POUR DIFFERENTES VALEURS DE « n »

On constate que signal et bruit se concentrent autour de leur valeur moyenne et que, même pour un rapport signal sur bruit faible (ici seulement 3 dB), le signal « sort » du bruit dès que le nombre de signaux intégrés est suffisant.

Cette propriété se retrouve lorsque l'on examine le comportement temporel des signaux :



On constate bien que le bruit se resserre autour de sa valeur moyenne, ce qui est sensible dès $n = 4$, ce qui permet au signal de ressortir du bruit, malgré le faible rapport signal sur bruit (seulement 3 dB) et ceci de manière très nette dès $n = 8$.

16.2 CIBLE LENTEMENT FLUCTUANTE

16.2.1 Analyse de l'effet de l'intégration (Proposée par Mr R Carré de la CSF)

Lorsque la cible fluctue deux cas peuvent se produire :

- la cible fluctue lentement devant la durée de la mesure ;
- la cible fluctue rapidement, à la limite d'une récurrence à la suivante.

Nous nous placerons dans le **cas d'une cible lentement fluctuante** ce qui permet de considérer que :

- la cible ne fluctue pas pendant la réception des n signaux nécessaires à une mesure ou plot ;
- la cible peut fluctuer d'une mesure à la suivante.

La valeur A^2 du signal ne varie pas pendant la durée de formation du plot. Le processus de moyennage donnant naissance à la variable Z , signal composite après post-intégration, reste le même que dans le cas précédent. Mais après intégration des n signaux, Z est une variable aléatoire dont chaque échantillon est :

- de moyenne $m_1 = n (A^2 + 1)$
- de variance $\sigma^2 = n.(2A^2 + 1)$

eux-mêmes aléatoires, qui dépendent de A amplitude dans un plot donné du signal fluctuant.

Nous nous intéresserons à $Z/n = I$, variable aléatoire dont chaque échantillon est :

- de moyenne $m_1 = A^2 + 1$
- de variance $\sigma^2 = (2A^2 + 1)/n$
- de valeur quadratique moyenne $m_2 = m_1^2 + \sigma^2$

$$m_2 = A^4 + 2A^2 + 1 + \frac{2A^2 + 1}{n}$$

La loi de probabilité de A^2 est connue, nous la qualifierons par sa densité de probabilité $f(A^2)$ et calculerons la moyenne pour tout A^2 de m_1 et m_2 .

$$\bar{m}_1 = \int_0^\infty (A^2 + 1) f(A^2) dA^2 = \bar{A}^2 + 1 = S/B + 1$$

d'après les propriétés des densités de probabilité, et si on se souvient que S/B est dans le cas des cibles fluctuantes la valeur moyenne de A^2 (pour $m = 1$).

$$\bar{m}_2 = \int_0^\infty \left(A^4 + 2A^2 + 1 + \frac{2A^2 + 1}{n} \right) f(A^2) dA^2$$

$$\bar{m}_2 = \bar{A}^4 + 2\bar{A}^2 + 1 + \frac{2\bar{A}^2 + 1}{n}$$

\bar{A}^4 est la valeur quadratique moyenne de A^2

$$\bar{A}^4 = (\overline{A^2})^2 + \sigma_{A^2}^2$$

$$\bar{A}^2 = S/B$$

d'où :

$$\bar{m}_2 = (S/B)^2 + 2 S/B + 1 + \frac{2 S/B + 1}{n} + \sigma_{A^2}^2$$

et dans le cas d'une cible fluctuant (en amplitude) suivant une loi de Rayleigh, soit en puissance selon une loi de Laplace de moyenne S/B et donc (Cf. § 6.4) de variance

$$\sigma_{A^2}^2 = (S/B)^2$$

on peut en déduire la variance $\sigma^2 = m_2 - m_1^2$:

$$\sigma^2 = (S/B)^2 + \frac{2 S/B + 1}{n}$$

Le signal composite intégré « I » est donc une variable aléatoire dépendant du bruit et du signal issu de la cible, ces deux phénomènes étant indépendants. Sa moyenne générale est :

$$\bar{m}_1 = S/B + 1$$

Si on ne traite qu'un seul écho, $n = 1$:

$$\bar{\sigma}^2 = (S/B + 1)^2 = \bar{m}_1^2$$

On retrouve bien une variable aléatoire suivant une loi de Laplace de moyenne $S/B + 1$, propriété démontrée au paragraphe 12.2 par une méthode différente.

Pour un grand nombre d'échos, $n \rightarrow \infty$

$$\bar{m}_1 = S/B + 1, \quad \bar{\sigma}^2 = (S/B)^2$$

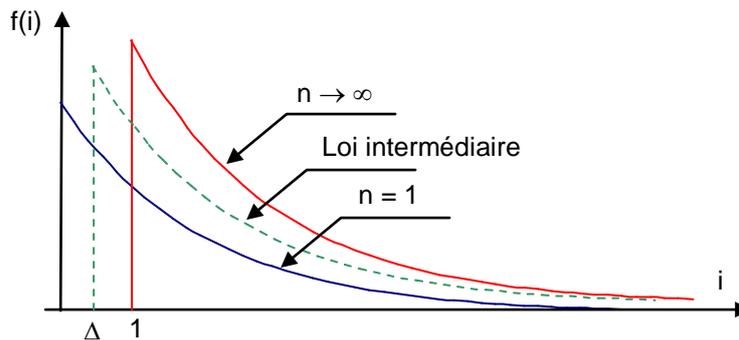
ce qui donne une loi de LAPLACE de moyenne S/B décalée de 1 vers les abscisses positives car en effet dans ce cas, le bruit intégré tend vers sa valeur moyenne : 1 et vient s'ajouter au signal qui lui fluctue suivant une loi de LAPLACE de moyenne S/B .

Nous voyons donc que pratiquement et pour les deux limites extrêmes c'est constamment le signal qui impose sa loi de fluctuation parce que :

- pour $n = 1$ nous avons vérifié que le signal composite suit la même loi que le signal seul,
- pour $n \rightarrow \infty$ la post-intégration vient annuler la fluctuation rapide due au bruit.

16.2.2 Choix d'un modèle de travail

Vu ce qui précède, nous choisirons l'hypothèse de travail suivante. Considérons la variable réduite $l = Z/n$ définie en 16.2. Aux limites, elle suit des lois de Laplace additionnées ou non de constantes, comme le montre le schéma suivant.



Pour les valeurs intermédiaires de n , la loi de fluctuation de l garde la même forme de Laplace, cette loi étant décalée à l'origine d'une valeur Δ de manière à respecter simultanément la valeur moyenne et la variance de l . soit :

$$\bar{\sigma}^2 = (S/B)^2 + \frac{2 S/B + 1}{n}$$

$$\bar{m} + \Delta = \bar{m}_1 = S/B + 1$$

$$\bar{m}^2 = \bar{\sigma}^2$$

L'ensemble de ces conditions permet de calculer Δ

$$\bar{\sigma}^2 = (S/B)^2 + \frac{2S/B + 1}{n} = \bar{m}^2 = (S/B + 1 - \Delta)^2$$

ce qui donne :

$$\Delta^2 - 2\Delta(S/B + 1) + 2S/B - (2/n)S/B + 1 - 1/n$$

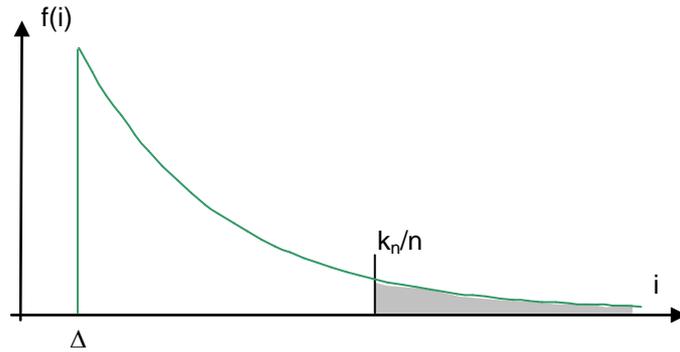
$$\Delta = S/B + 1 - \sqrt{(S/B)^2 + \frac{2S/B + 1}{n}}$$

Car $\Delta < 1$, et :

$$f(i) = \frac{1}{\bar{m}} \exp\left\{-\frac{i - \Delta}{\bar{m}}\right\} = \frac{1}{S/B + 1 - \Delta} \exp\left\{\frac{-(i - \Delta)}{S/B + 1 - \Delta}\right\}$$

Pour $i > \Delta$.

Nous avons calculé au paragraphe 14.5 le seuil à imposer suivant n pour conserver la Pf_a : k_n ; dans notre cas, où la variable considérée est normée par rapport à n , le seuil à prendre en compte sera k_n/n et nous aurons :



$$P_d = \int_{k_n/n}^{\infty} f(i) \cdot di = \int_{k_n/n}^{\infty} \frac{1}{S/B + 1 - \Delta} \exp \left\{ \frac{-(i - \Delta)}{S/B + 1 - \Delta} \right\} \cdot di$$

$$P_d = \exp \left\{ \frac{-(k_n/n - \Delta)}{S/B + 1 - \Delta} \right\}$$

Les deux relations précédentes permettent de calculer P_d connaissant S/B et n . Néanmoins, nous allons tenter de faire apparaître des simplifications pour calculer le gain de S/B apporté par la post-intégration.

16.2.3 Recherche d'une loi simplifiée

Si on se limite à l'étude des P_d élevés, $n \cdot S/B > 1$, car $(S/B)_1$, pour une impulsion, est grand devant 1 et le gain de S/B est inférieur à n . On peut alors écrire :

$$\Delta \cong S/B + 1 - \sqrt{(S/B)^2 \left(1 + \frac{2S/B + 1}{(S/B)^2 \cdot n} \right)}$$

$$\Delta \cong S/B + 1 - S/B \left(1 + \frac{2S/B + 1}{2(S/B)^2 \cdot n} \right)$$

$$\Delta \cong 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{2S/B \cdot n}$$

Lorsque n est faible $n \cdot S/B > n$, on peut donc négliger le second terme.

Si n très grand, $\Delta \rightarrow 1$:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{2S/B \cdot n} \ll 1$$

et le fait de négliger le second terme de cette expression ne devrait pas modifier sensiblement le résultat final.

En première approximation nous poserons :

$$\Delta \cong 1 - \frac{1}{n}$$

Il reste alors à comparer le cas $n = 1$:

$$P_d = \exp \left\{ \frac{-k_1}{(S/B)_1 + 1} \right\}$$

et le cas n quelconque :

$$P_d = \exp \left\{ \frac{-(k_n/n - \Delta)}{(S/B)_n + 1 - \Delta} \right\}$$

à P_d égal il vient :

$$\frac{(k_n/n - \Delta)}{(S/B)_n + 1 - \Delta} = \frac{k_1}{(S/B)_1 + 1}$$

avec $\Delta = 1 - 1/n$

$$((S/B)_1 + 1) \cdot \left(\frac{k_n}{n} - 1 + \frac{1}{n} \right) = \left((S/B)_n + \frac{1}{n} \right) k_1$$

Soit comme : $(S/B)_1 \gg 1$ et $(S/B)_n \gg 1/n$ (le gain de S/B est plus petit que n):

$$g(S/B) = \frac{(S/B)_1}{(S/B)_n} \approx \frac{k_1}{(k_n/n) - 1 + 1/n}$$

16.2.4 Domaine de validité

Pour vérifier la validité de la loi simplifiée la vérification suivante a été effectuée à P_d fixée :

- calcul de Δ et g par loi simplifiée, calcul de $(S/B)_n = (S/B)_1 - g$,
- calcul du Δ corrigé (Δ_c) par la relation du paragraphe 16.2.2, calcul de la P_d correspondante à comparer à la P_d initiale.

Les résultats sont présentés ci-après pour plusieurs couples

n	2	5	10	20	40	80
Δ	0,5	0,8	0,9	0,95	0,975	0,9875
Δ_c	0,47	0,76	0,86	0,92	0,953	0,971
P_{dc}	0,49	0,48	0,47	0,46	0,46	0,45

$$P_d = 0,5 - P_{f_a} = 10^{-2}$$

n	2	5	10	20	40	80
Δ	0,5	0,8	0,9	0,95	0,975	0,9875
Δ_c	0,48	0,77	0,88	0,93	0,960	0,976
P_{dc}	0,49	0,49	0,48	0,48	0,47	0,47

$$P_d = 0,5 - P_{f_a} = 10^{-3}$$

n	2	5	10	20	40	80
Δ	0,5	0,8	0,9	0,95	0,975	0,9875
Δ_c	0,49	0,79	0,89	0,94	0,968	0,9825
P_{dc}	0,80	0,80	0,79	0,79	0,79	0,79

$$P_d = 0,8 - P_{f_a} = 10^{-2}$$

Les résultats obtenus montrent que pour $P_d = 0,5$ et $P_{fa} = 10^{-2}$ l'erreur, reste inférieure à 3 % sur la P_d , soit environ 0,5 dB, elle peut atteindre 5% (0,75 dB) aux grandes valeurs de n.

Ces résultats s'améliorent pour $P_d = 0,5$ et $P_{fa} = 10^{-3}$ où l'erreur reste inférieure à 3 % sur P_d .

Pour $P_d = 0,8$ et $P_{fa} = 10^{-2}$ ou elle reste inférieure à 1 % (0,2 dB).

On peut donc considérer la validité de ce calcul comme admise pour $P_d > 0,5$ et $P_{fa} < 10^{-2}$. Sa précision de l'ordre de 0,2 à 0,3 dB pour $P_{fa} < 10^{-3}$ ou $P_d > 0,8$. Les résultats sont donnés dans le tableau suivant.

TABLEAU 8

Gain de post-intégration - Cible lentement fluctuante

n \ P _{fa}	10 ⁻²	10 ⁻³	10 ⁻⁴	10 ⁻⁵	10 ⁻⁶	10 ⁻⁷	10 ⁻⁸
1	0	0	0	0	0	0	0
2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,6
3	3,3	3,5	3,7	3,8	3,9	4,0	4,1
4	4,2	4,4	4,6	4,7	4,8	4,9	5,1
5	4,8	5,0	5,2	5,4	5,5	5,7	5,8
6	5,3	5,6	5,8	6,0	6,1	6,3	6,4
7	5,7	6,0	6,2	6,4	6,6	6,8	7,0
8	6,1	6,4	6,6	6,8	7,0	7,2	7,4
9	6,4	6,7	7,0	7,2	7,4	7,6	7,8
10	6,7	7,0	7,3	7,5	7,7	7,9	8,1
12	7,2	7,5	7,8	8,0	8,2	8,4	8,6
14	7,6	7,9	8,2	8,5	8,7	8,9	9,1
16	8,0	8,3	8,6	8,9	9,1	9,3	9,5
18	8,3	8,6	8,9	9,2	9,4	9,7	9,9
20	8,6	8,9	9,2	9,5	9,7	10,0	10,2
24	9,1	9,4	9,7	10,0	10,2	10,5	10,7
28	9,5	9,8	10,1	10,4	10,6	10,9	11,1
32	9,8	10,2	10,5	10,8	11,0	11,3	11,5
36	10,1	10,5	10,8	11,1	11,4	11,7	11,9
40	10,3	10,7	11,0	11,3	11,6	11,9	12,2
48	10,8	11,2	11,6	11,9	12,2	12,5	12,8
56	11,2	11,6	12,0	12,3	12,6	12,9	13,2
64	11,5	11,9	12,3	12,6	12,9	13,2	13,5
72	11,8	12,2	12,6	12,9	13,2	13,5	13,8
80	12,0	12,4	12,8	13,1	13,4	13,7	14,0

16.2.5 Comparaison avec la cible non fluctuante

L'examen comparé des tableaux 7 et 8, montre que leurs résultats convergent en tous points l'écart qui varie entre 0,1 et 0,3 dB, restant de l'ordre de grandeur de la précision des calculs.

On peut en conclure qu'en pratique le gain de post-intégration ne dépend pas du mode de fluctuation de la cible dès lors qu'elle peut être considérée comme lente. Ceci est logique puisque, les échos de cible ne fluctuent pas pendant la durée de la mesure que l'écho soit stable ou lentement fluctuant.

Cela permet d'étendre les résultats résumés dans le tableau 8 à la seconde loi de fluctuation.

16.2.6 Post-intégration dans un radar diversité

Dans le radar diversité deux sommations sont faites :

- à chaque récurrence, sommation des n voies (n_v),
- sur l'ensemble des signaux observés, sommation des n échos.

La première sommation a pour effet de modifier la loi de fluctuation du mélange signal plus bruit qui suit alors une loi de Khi2 à $2n_v$ degrés de liberté, pour le premier cas de fluctuation et à $4n_v$ degrés de liberté pour le second cas de fluctuation.

Hors nous venons d'établir que le gain de post-intégration ne dépend pas de la loi de fluctuation de la cible. D'où la conclusion :

Dans le cas d'un radar diversité, on pourra cumuler gain de diversité et gain de post-intégration (cible fluctuante), et ce avec une très bonne précision pour tout n_v

16.3 CIBLE RAPIDEMENT FLUCTUANTE – RADAR ALEATOIRE

Nous nous plaçons maintenant dans le cas d'une cible rapidement fluctuante, de telle manière que chacun des n signaux composant le plot puisse être considéré comme indépendant des $n - 1$ autres. C'est en pratique, le cas d'un radar émettant, à chaque instant, une fréquence différente, suffisamment décalée des autres, pour que la surface équivalente de la cible soit indépendante d'un signal au suivant : le radar aléatoire.

Nous nous retrouvons alors dans les conditions étudiées au paragraphe 14.

16.3.1 Radar aléatoire n échos – CAS 1 (Swerling 2)

Le calcul du rapport signal sur bruit par écho est défini directement par la relation :

$$\left(\frac{S}{B}\right)_e = 10 \cdot \log\left(\frac{k_n}{u_n} - 1\right)$$

Avec k_n issu du tableau 4 et u_n issu du tableau 5

16.3.2 Radar aléatoire n échos – CAS 2 (Swerling 4)

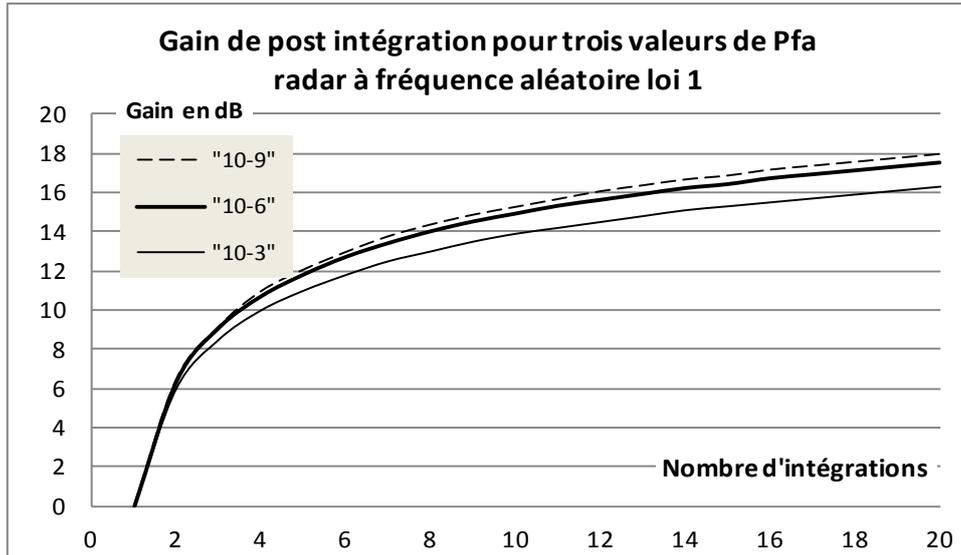
Le calcul du rapport signal sur bruit par écho est défini directement par la relation :

$$\left(\frac{S}{B}\right)_e = 10 \cdot \log\left(\frac{2 \cdot k_n}{v_n} - 1\right)$$

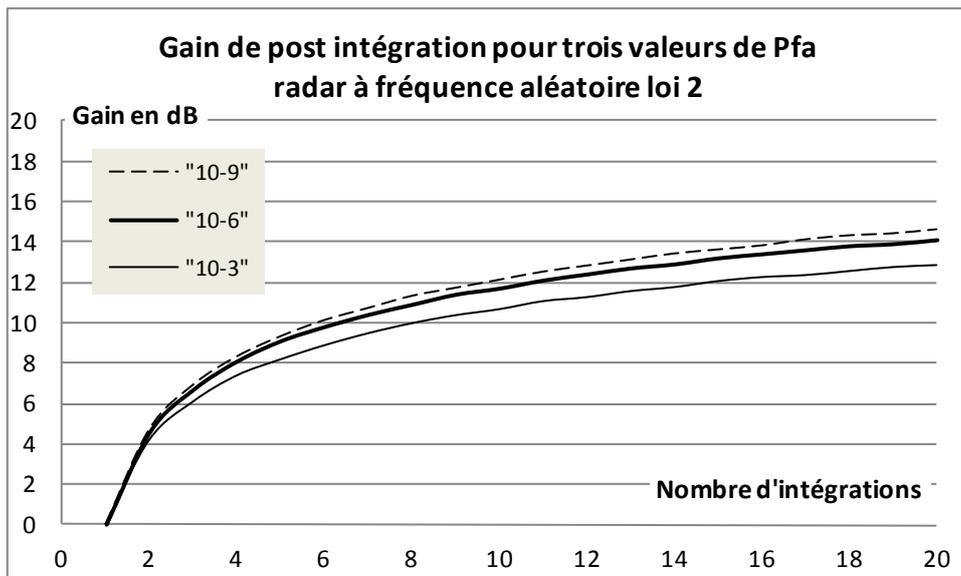
Avec k_n issu du tableau 4 et v_n issu du tableau 6.

16.3.3 Présentation des résultats

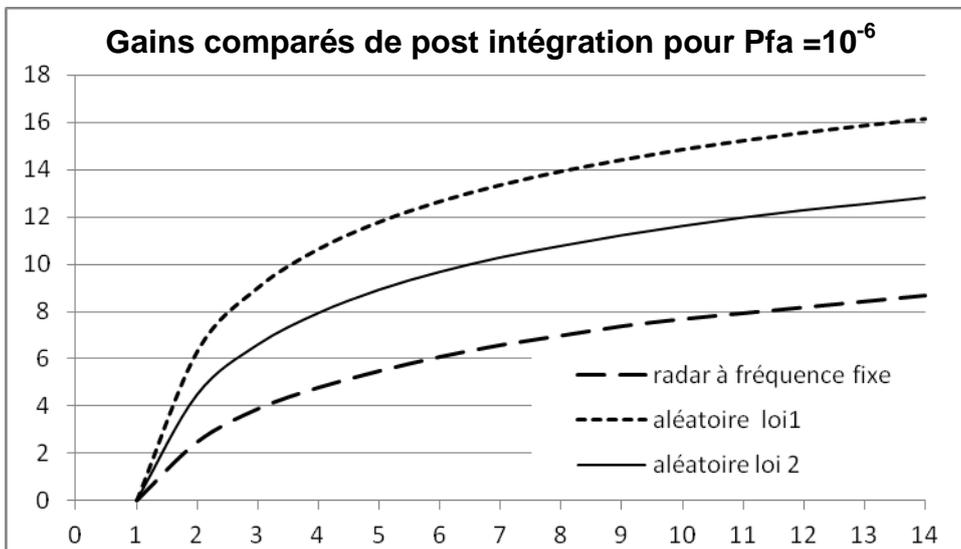
Les abaques présentées ci-après illustrent les résultats obtenus dans des cas typiques.



CIBLE FLUCTUANTE LOI 1 -GAIN DE POST-INTÉGRATION



CIBLE FLUCTUANTE LOI 2 -GAIN DE POST-INTÉGRATION



COMPARAISON DES TROIS LOIS DE FLUCTUATION

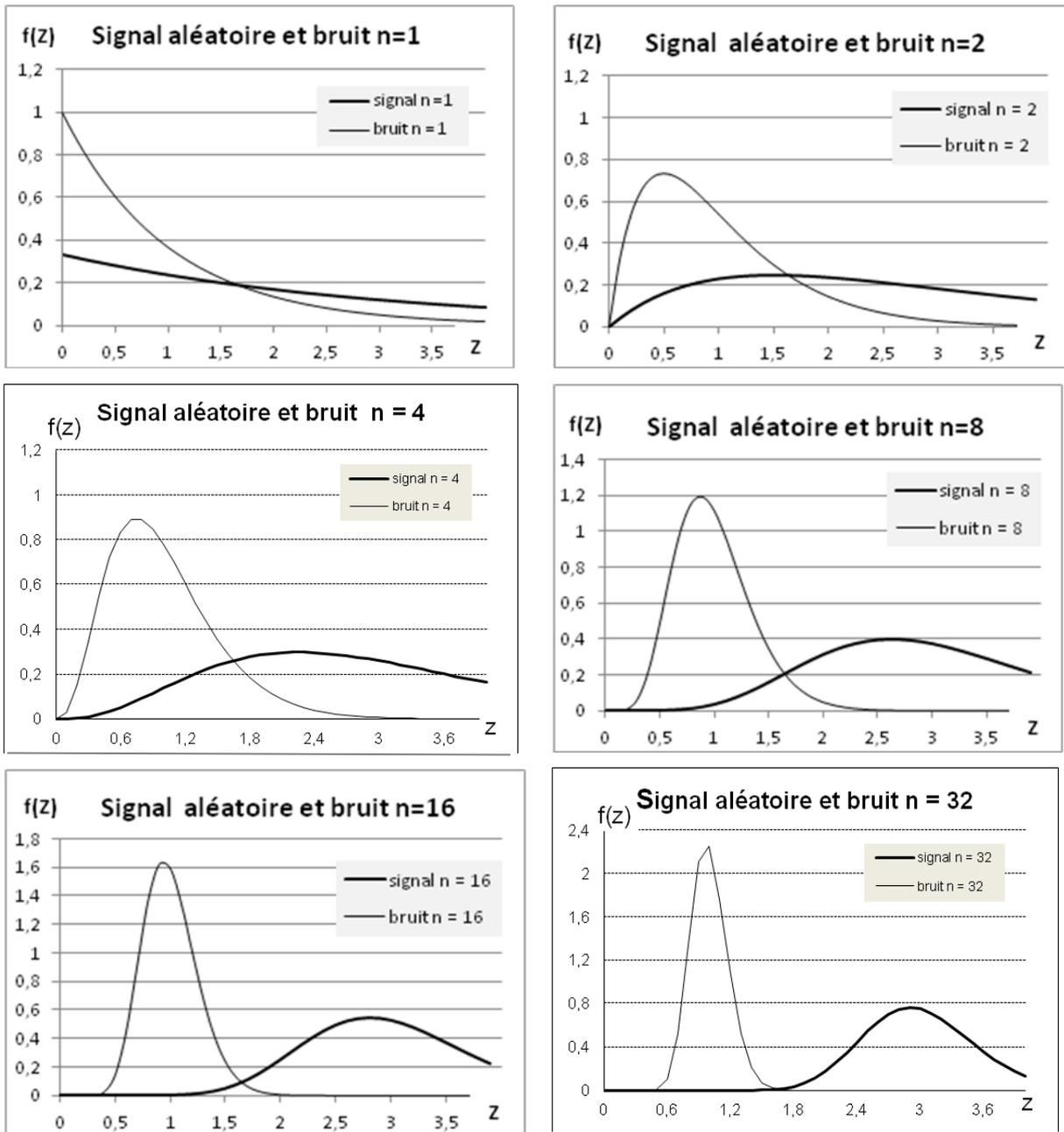
On constate que le gain de post intégration dépend du comportement de la cible les meilleurs résultats étant obtenus par les radars aléatoires qui cumulent le gain de diversité et le gain de post intégration en une seule opération.

16.3.4 Interprétation des résultats

On a établi au § 14.7 pour la densité de probabilité de la moyenne de « n » signaux suivant une loi de Laplace :

$$g_n(z) = \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \left(\frac{n}{m}\right)^n \exp\left\{-\frac{n.z}{m}\right\}$$

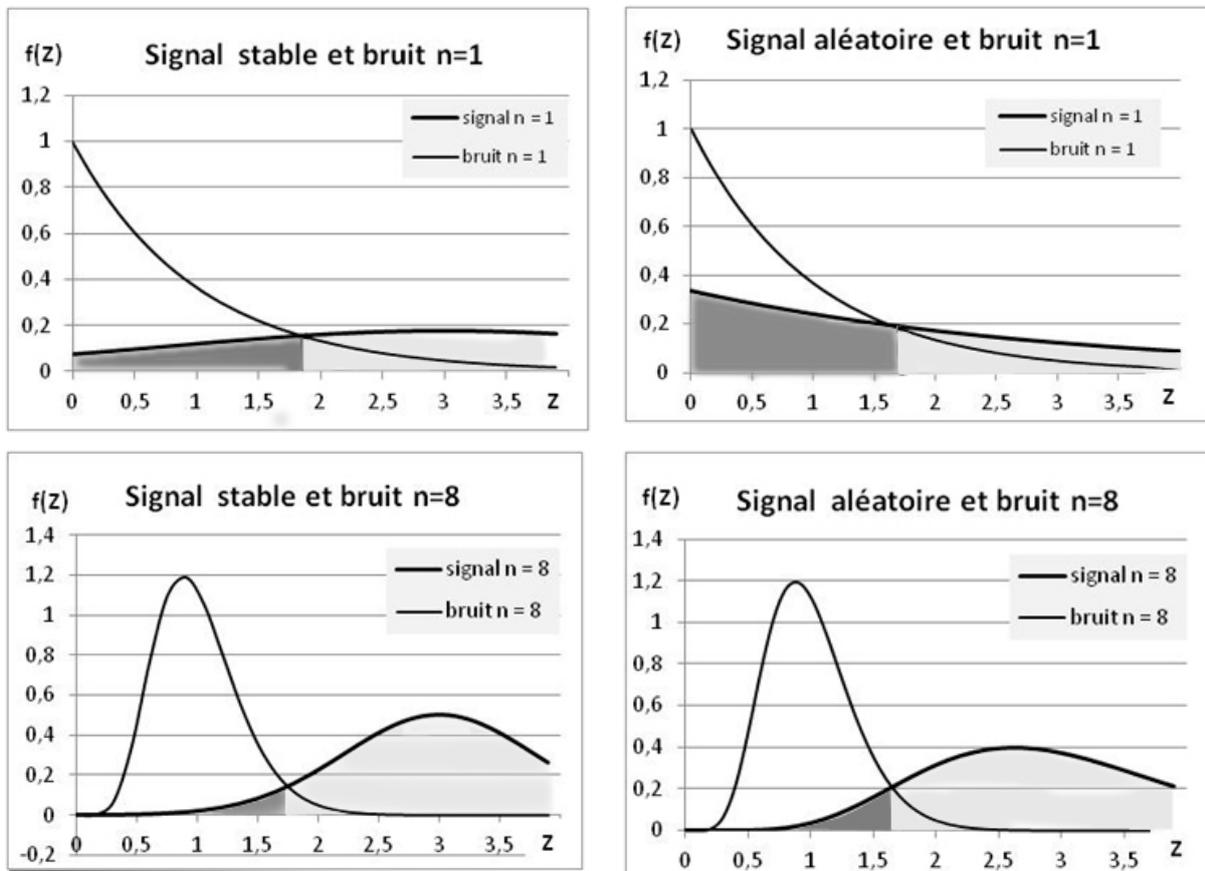
Avec $m = 1$ pour le bruit seul et $m = S/B + 1$ pour le mélange signal plus bruit. Cela permet de tracer leurs densités de probabilité en fonction du nombre d'intégrations « n ». Les figures suivantes présentent ces densités de probabilité:



DENSITE DE PROBABILITE DU SIGNAL ET DU BRUIT, POUR DIFFERENTES VALEURS DE « n »

On constate aussi dans ce cas, que signal et bruit se concentrent autour de leurs valeurs moyennes et que, même pour un rapport signal sur bruit faible (ici seulement 3 dB), le signal « sort » du bruit dès que le nombre de signaux intégrés est suffisant.

On constate également que, quoique partant d'une situation défavorable, la post-intégration en signal aléatoire converge rapidement en fonction de "n" pour donner des résultats tout à fait comparables à la post-intégration sur un signal stable, comme le montrent les graphiques ci après, les surfaces ombrées définissant les probabilités de détection (clair) et de non-détection (foncé).



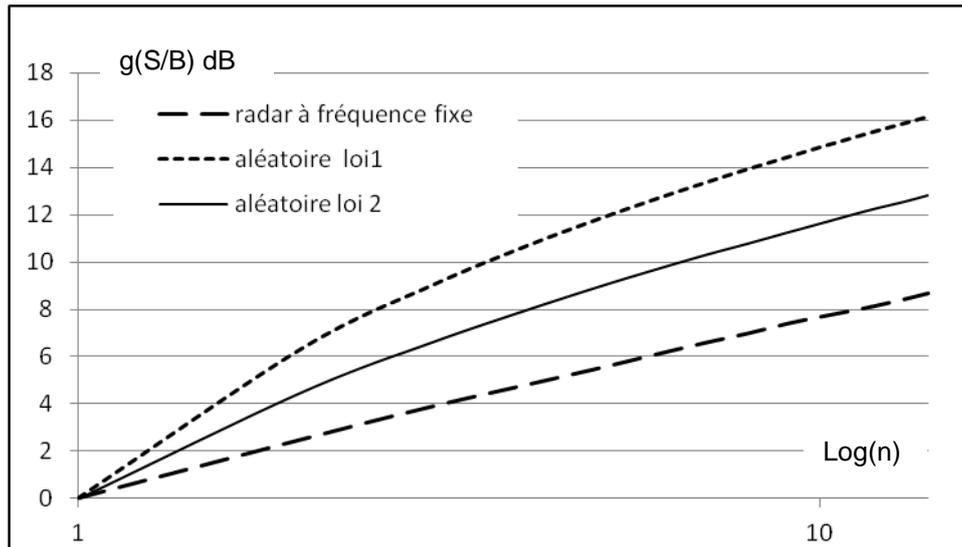
Ceci confirme la comparaison des résultats présentée au § 16.3.3.

16.4 CONSIDERATIONS PRATIQUES – LOIS EMPIRIQUES

Les résultats précédents montrent clairement que le gain de post-intégration en fréquence aléatoire est bien supérieur à celui obtenu en fréquence fixe, car alors se combinent, le gain de diversité et le gain de post-intégration par accumulation de puissances, sans multiplication du nombre de voies, donc sans addition de bruits, ce qui est très favorable au signal.

Par ailleurs, pour que les signaux soient décorréllés, il faut trouver dans la bande du radar n fréquences « indépendantes » en pratique cette valeur maximale est souvent voisine de 10. On pourra donc retenir la règle pratique suivante : au-delà de $n = 10$, seul joue le gain de post-intégration par addition des puissances.

En outre, l'écriture des courbes-gain de post-intégration en dB et $\log(n)$, comme sur la figure ci après montre que l'on peut linéariser les résultats, avec une très bonne précision pour la cible lentement fluctuante, et une précision de l'ordre de 0,3 dB dans les autres cas..



Ce qui permet de proposer les lois empiriques suivantes :

$$P_{fa} = 10^{-6}$$

SWERLING 1 et 3 :	$g = 7,7 \cdot \log(n)$	
SWERLING 2	$2 < n < 10$	$n > 10$
$P_d = 0,95$	$4,2 + 13,5 \cdot \log(n)$	$9,6 + 7,7 \cdot \log(n)$
$P_d = 0,9$	$3,1 + 12 \cdot \log(n)$	$7,2 + 7,7 \cdot \log(n)$
$P_d = 0,8$	$2,1 + 10,5 \cdot \log(n)$	$4,7 + 7,7 \cdot \log(n)$
SWERLING 4	$2 < n < 10$	$n > 10$
$P_d = 0,95$	$2,1 + 11 \cdot \log(n)$	$5,2 + 7,7 \cdot \log(n)$
$P_d = 0,9$	$1,7 + 10 \cdot \log(n)$	$3,9 + 7,7 \cdot \log(n)$
$P_d = 0,8$	$1,3 + 9 \cdot \log(n)$	$2,6 + 7,7 \cdot \log(n)$

$$P_{fa} = 10^{-3}$$

SWERLING 1 et 3 :	$g = 7,0 \cdot \log(n)$	
SWERLING 2	$2 < n < 10$	$n > 10$
$P_d = 0,95$	$3,7 + 13 \cdot \log(n)$	$9,2 + 7 \cdot \log(n)$
$P_d = 0,9$	$3,1 + 11,5 \cdot \log(n)$	$6,9 + 7 \cdot \log(n)$
$P_d = 0,8$	$1,8 + 10 \cdot \log(n)$	$4,5 + 7 \cdot \log(n)$
SWERLING 4	$2 < n < 10$	$n > 10$
$P_d = 0,95$	$2,1 + 10 \cdot \log(n)$	$5 + 7 \cdot \log(n)$
$P_d = 0,9$	$1,4 + 9,5 \cdot \log(n)$	$3,7 + 7 \cdot \log(n)$
$P_d = 0,8$	$1,1 + 8,5 \cdot \log(n)$	$2,4 + 7 \cdot \log(n)$

On notera également qu'en pratique, pour des échos de force variable, le gain de post-intégration dépend de P_d , donc du rapport S/B. Il faudra donc dans certains cas disposer des lois complètes $P_d(S/B)$ à n fixé.

17 RECAPITULATION EMPLOI PRATIQUE DES RESULTATS

Dans la pratique, une mesure complète ou « plot » est toujours formée de n mesures élémentaires ou « échos ». Deux méthodes de calcul pourront être appliquées suivant les cas :

- calcul $(S/B)_T$ nécessaire dans le cas d'une impulsion par plot, puis par le jeu des améliorations dues à la formation du plot calcul du S/B par impulsion élémentaire composant le plot : $(S/B)_e$.
- lorsque cela est possible, calcul direct du $(S/B)_e$ par impulsion élémentaire, compte tenu du mode de formation du plot.

17.1 CIBLE NON FLUCTUANTE n ECHOS

Calculer les conditions de détection sur une seule impulsion $(S/B)_T$ par la relation de la page 40 ou utilisation du tableau 1 de la page 40.

Calculer le gain de post-intégration à l'aide du tableau 7 de la page 70 et en déduire le rapport signal sur bruit par écho :

$$(S/B)_e = (S/B)_T - g(n), \quad (\text{en dB})$$

17.2 CIBLE FLUCTUANTE RADAR MONOFREQUENCE n ECHOS

17.2.1 Cas 1 – Swerling 1

Calculer $(S/B)_T$ par la relation de la page 44, ou utilisation du tableau 2 de la page 46.

Calculer le gain de post-intégration par la relation page 76 ou le tableau 8 page 77, en déduire le rapport signal sur bruit par écho :

$$(S/B)_e = (S/B)_T - g(n), \quad (\text{en dB})$$

17.2.2 Cas 2 – Swerling 3

Calculer $(S/B)_T$ par la relation de la page 45 ou utilisation directe du tableau 3 page 46.

Calculer le gain de post-intégration par la relation page 76 ou le tableau 8 page 77, en déduire le rapport signal sur bruit par écho :

$$(S/B)_e = (S/B)_T - g(n), \quad (\text{en dB})$$

17.3 CIBLE FLUCTUANTE, DIVERSITE DE FREQUENCE, PUIS POST - INTEGRATION

17.3.1 Cas 1

Utiliser les tableaux 4 et 5 pages 59 et 60 en posant $n = n_v$ pour calculer par voie, pour un seul écho, le rapport signal sur bruit nécessaire (en dB) :

$$(S/B)_{nv} = 10 \cdot \log \left(\frac{k_{nv}}{u_{nv}} - 1 \right)$$

Calculer le rapport signal sur bruit élémentaire par voie en appliquant au résultat précédent le gain de post-intégration pour n échos du tableau 8 page 77.

$$(S/B)_{ev} = (S/B)_{nv} - g(n)$$

Pour comparer aux autres procédés, calculer un rapport signal sur bruit élémentaire pour l'ensemble des voies :

$$(S/B)_e = (S/B)_{ev} + 10 \log(n_v)$$

$(S/B)_e$ est représentatif de la puissance émise par récurrence, $(S/B)_{ev}$ de la puissance par voie à chaque récurrence.

17.3.2 Cas 2

Utiliser les tableaux 4 et 6 des pages 59 et 61 en posant $n = n_v$ pour calculer par voie, pour un seul écho, le rapport signal sur bruit nécessaire (en dB) :

$$\left(\frac{S}{B}\right)_{nv} = 10 \cdot \log\left(\frac{2k_{nv} - 1}{v_{nv}}\right)$$

Calculer le rapport signal sur bruit élémentaire par voie en appliquant au résultat précédent le gain de post-intégration pour n échos du tableau 8 page 77.

$$(S/B)_{ev} = (S/B)_{nv} - g(n)$$

Calculer t le rapport signal sur bruit $(S/B)_e$ représentatif de la puissance totale émise :

$$(S/B)_e = (S/B)_{ev} + 10 \log(n_v)$$

17.4 CIBLE FLUCTUANTE, FREQUENCE VARIABLE A CHAQUE EMISSION N ECHOS

17.4.1 Cas 1 – Swerling 2

Utiliser directement les tableaux 4 et 5 pages 59 et 60 pour calculer le rapport $(S/B)_e$ par écho. En pratique, compte tenu des bandes d'émission, cette relation est à limiter à $n \leq 10$.

$$\left(\frac{S}{B}\right)_e = 10 \log\left(\frac{k_n}{u_n} - 1\right)$$

17.4.2 Cas 2 – Swerling 4

Utiliser directement les tableaux 4 et 6 pages 59 et 61 pour calculer le rapport $(S/B)_e$ par écho. En pratique, compte tenu des bandes d'émission cette relation est à limiter à $n \leq 10$.

$$\left(\frac{S}{B}\right)_e = 10 \cdot \log\left(\frac{2k_n - 1}{v_n}\right)$$

17.5 FONCTIONNEMENT EN SEQUENCES

Soit un radar émettant n_r rafales de n échos, la fréquence restant fixe pendant une rafale mais variant d'une rafale à la suivante.

On peut alors directement utiliser les relations :

a - Cas 1 – Swerling 2 sur n_r séquences et intégration n échos

$$\left(\frac{S}{B}\right)_e = 10 \cdot \log\left(\frac{k_{nr}}{u_{nr}} - 1\right) - g(n)$$

b - Cas 2 – Swerling 4 sur n_r séquences et intégration n échos

$$\left(\frac{S}{B}\right)_e = 10 \cdot \log\left(\frac{2k_{nr}}{v_{nr}} - 1\right) - g(n)$$

Les valeurs de k, u et v sont respectivement données dans les tableaux 4, 5 et 6 pages 59, 60 et 61. Les valeurs de g sont celles du tableau 8 page 77.

17.6 UTILISATION DES LOIS SIMPLIFIEES

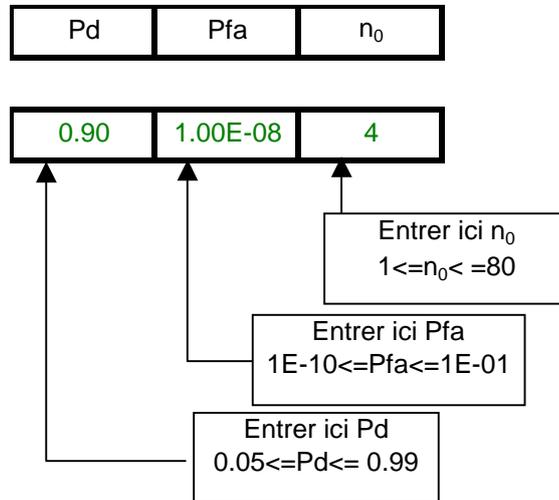
Les lois simplifiées page 82 s'utilisent en retranchant du $(S/B)_T$ le gain adéquat de post-intégration correspondant au cas traité, cible lentement fluctuante, cible rapidement fluctuante ou séquences. Elles ne traitent pas les radars diversité.

18 CALCULATEUR DE RAPPORT SIGNAL SUR BRUIT

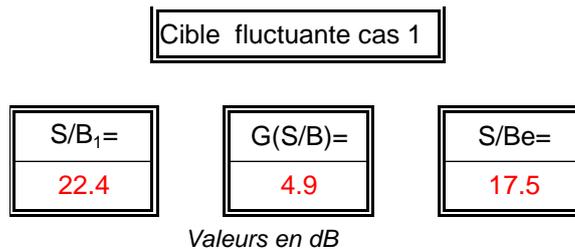
Un calculateur de rapport signal sur bruit a été composé sous Excel, pour réaliser les calculs précédents. Les différents cas de détection y sont traités :

18.1 RADAR A FREQUENCE FIXE

Données d'entrée, n_0 est le nombre d'impulsions post intégrées par plot :



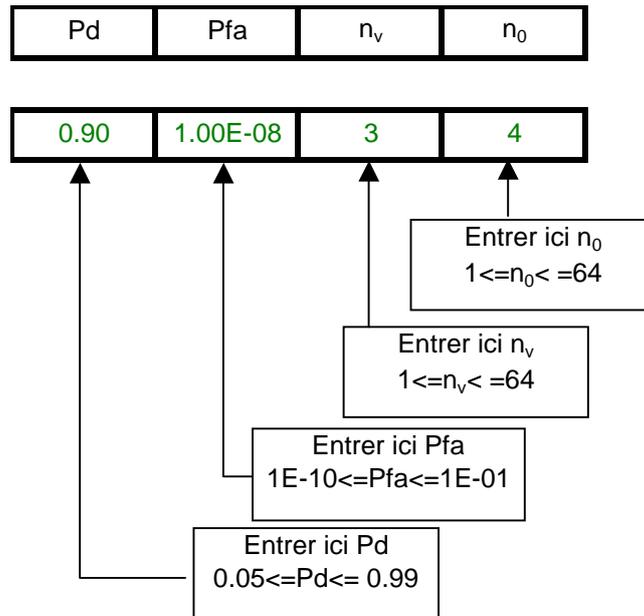
Données de sortie classées par type de cible, exemple :



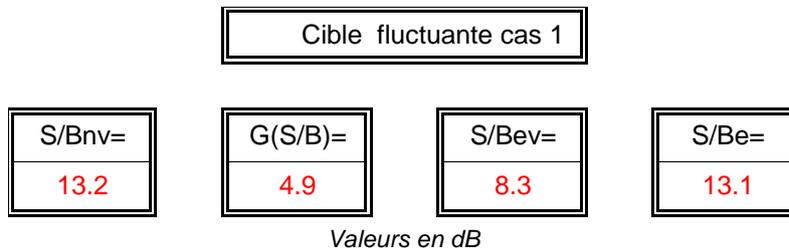
Le rapport signal sur bruit élémentaire est le S/B sur une impulsion, diminué du gain de post intégration sur les n_0 signaux intégrés.

18.2 RADAR DIVERSITE

Données d'entrée, une donnée d'entrée supplémentaire est le nombre de voies diversité n_v :

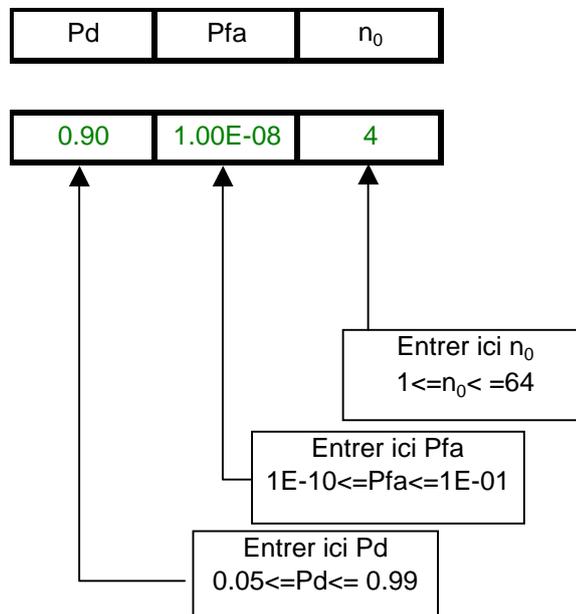


Données de sorties classées par type de cible, exemple :



18.3 RADAR ALEATOIRE

Données d'entrée, n_0 est le nombre d'impulsions post intégrées par plot :



Données de sortie classées par type de cible, exemple :

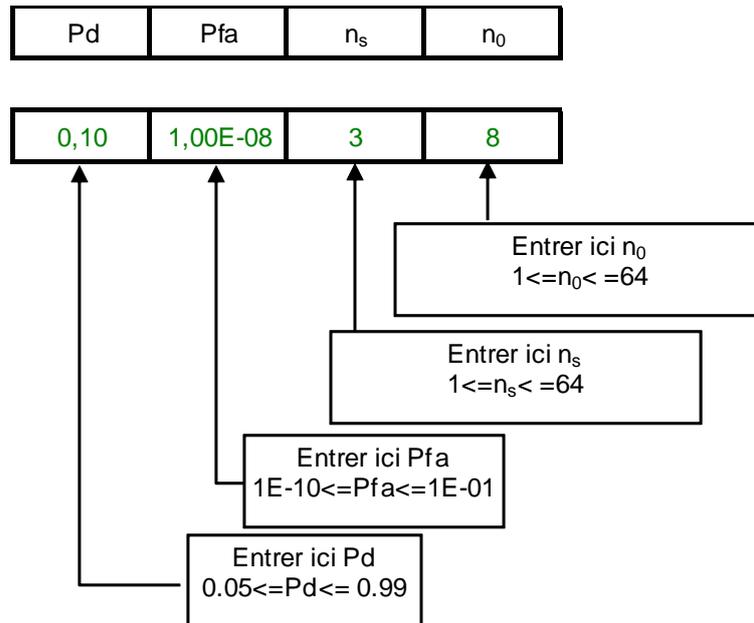
Cible fluctuante cas 1

S/Be=
11.5

Valeurs en dB

18.4 SEQUENCES

Données d'entrée, n_0 est le nombre d'impulsions post intégrées par séquence, n_s le nombre de séquences traitées :



Données de sortie classées par type de cible, exemple :

Cible fluctuante cas 1

S/Bns=	G(S/B)=	S/Be
5,5	7,2	-1,7

Valeurs en dB

18.5 SYNTHÈSE : NOTATION SWERLING DES CAS DE FLUCTUATION

- a - Cible non fluctuante $\Rightarrow \Rightarrow$ Swerling 0
- b - Cible lentement fluctuante Cas 1 $\Rightarrow \Rightarrow$ Swerling 1
- c - Cible lentement fluctuante Cas 2 $\Rightarrow \Rightarrow$ Swerling 3
- d - Cible rapidement fluctuante Cas 1 $\Rightarrow \Rightarrow$ Swerling 2
- e - Cible rapidement fluctuante Cas 2 $\Rightarrow \Rightarrow$ Swerling 4
- f - Radars diversité : pas de correspondance Swerling

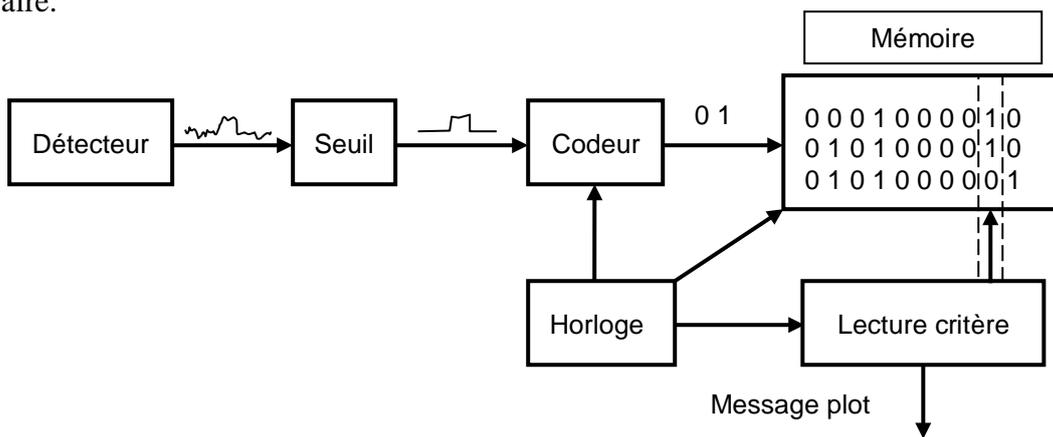
19 NOTIONS SUR LES TRAITEMENTS PAR EXTRACTEURS

19.1 GENERALITES

Il existe de nombreux types d'extracteurs, en particulier on peut faire par le calcul numérique les opérations de post-intégration décrites au paragraphe 16 ou imaginer des tests de toutes sortes sur une information codée.

Nous nous contenterons de l'étude du modèle le plus accessible au calcul dit « *extracteur à double seuil* », qui est le plus simple et, sans doute pour cette raison, le plus répandu.

Après détection, le signal est comparé à un seuil, puis codé à un rythme fixé par une horloge (par exemple, toutes les demi-durées d'impulsion depuis la synchronisation émission) de telle manière que, chaque fois que le signal dépasse le seuil, le codeur marque 1, et 0 dans le cas contraire.



Ces chiffres sont rangés dans une mémoire de telle sorte que l'on puisse lire à l'instant voulu, non seulement ce qui s'est passé à une distance donnée à la récurrence présente, mais également ce qui s'est passé à cette même distance à n récurrences antérieures.

Un dispositif de lecture permet de lire l'ensemble du message ainsi formé, il compte alors les 1 enregistrés sur l'ensemble des n mesures et compare le nombre obtenu : X à un nombre de référence q .

Si $X \geq q$, on décide qu'il y a présence de cible.

Si $X < q$, on décide qu'il y a absence de cible.

Le nombre q est choisi de telle manière que : $1 \leq q \leq n$.

Ainsi donc, les dépassements dus au seul bruit qui sont de positions aléatoires dans la mémoire peuvent être filtrés et les cibles, dont les échos se produisent à une même distance, donnent lieu à un message positif.

19.2 EXEMPLE D'ORGANISATION DE MEMOIRE

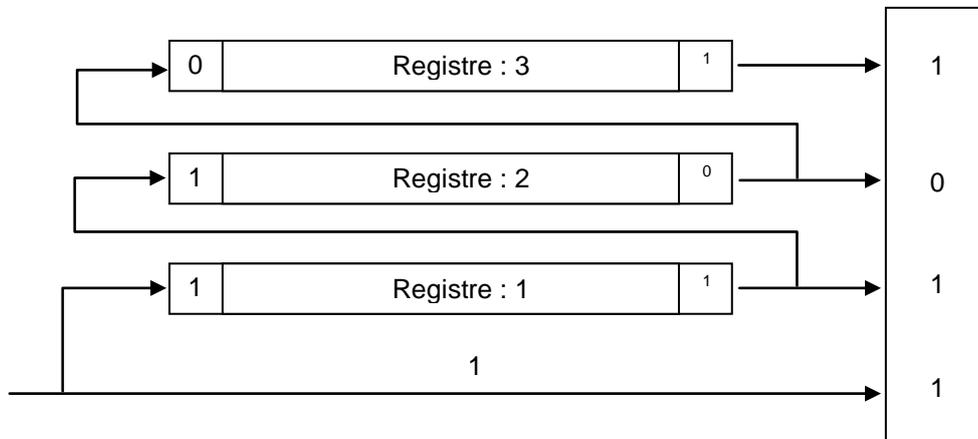
On peut réaliser la mémoire de manière très simple : chaque information 0 ou 1 est inscrite à l'entrée d'un registre à décalage, à chaque quantum de temps défini par l'horloge.

Au quantum suivant, l'information placée à l'entrée est décalée d'un rang et une nouvelle information est placée à l'entrée, etc., de telle manière qu'à l'instant où l'information correspondant à une distance D se présente à l'entrée du registre, l'information de même distance correspondant à la récurrence précédente se trouve à la sortie du même registre.

L'information incidente est alors inscrite dans le registre n° 1 et l'information antérieure, sortie du registre 1 inscrite dans un registre 2 de même type, etc...On peut, par cette méthode, charger le nombre de registres désiré et en régime continu on trouve :

- à l'instant t : une information incidente à l'entrée du registre 1 et $n - 1$ informations antérieures à la sortie des $n - 1$ registres.
- à l'instant suivant $t + \Delta t$ (Δt période d'horloge), ces n informations sont inscrites dans le lecteur et les $n - 1$, plus récentes, en tête des registres.

Il ne reste plus qu'à opérer la vérification du critère sur l'information contenue dans le lecteur.



Instant t : les informations (1 0 1 1) sont présentes en bout des registres et sur la ligne directe.
 Instant $t + \Delta t$: ces informations sont transférées dans le dispositif de lecture et simultanément en tête des registres, l'information la plus récente dans le registre 1, la plus ancienne libérée.

Le problème théorique posé est celui du choix du « critère de deuxième seuil » q permettant d'obtenir à S/B donné la meilleure détection. Nous allons examiner les moyens à mettre en œuvre pour le résoudre.

19.3 EFFET DE L'EXTRACTION SUR LA FAUSSE ALARME

Lorsque seul le bruit se présente à la sortie du détecteur, il donne lieu à une suite de signaux indépendants. La probabilité pour qu'il dépasse le seuil est p_{fa} . La probabilité pour que q au moins points de bruit sur n dépassent le seuil est la somme des probabilités pour que :

$$q \text{ dépassent le seuil} \\ q + 1 \text{ dépassent le seuil} \\ \vdots \\ n \text{ dépassent le seuil}$$

Chacune des probabilités élémentaires est la probabilité pour que, dans une suite de « n » tirages indépendants, un événement de probabilité p_{fa} apparaisse « i » fois. Elles répondent à la loi binomiale et ont donc pour expression :

$$P_i = C_n^i p_{fa}^i (1 - p_{fa})^{n-i}$$

P_{fa} est la somme de ces probabilités élémentaires et nous aurons donc :

$$P_{fa} = \sum_{q}^n C_n^i p_{fa}^i (1 - p_{fa})^{n-i}$$

p_{fa} est généralement assez faible pour que l'on puisse poser :

$$1 - p_{fa} \sim 1 ; p_{fa}^{i+1} \ll p_{fa}^i$$

dans ce cas, l'expression de P_{fa} peut s'écrire :

$$P_{fa} \cong C_n^q p_{fa}^q$$

19.4 CALCUL DE P_d SI LES ECHOS SONT INDEPENDANTS

Ce cas se produit lorsque :

- la cible ne fluctue pas car, en effet, la fluctuation du signal composite perçu par le radar n'est due qu'au seul bruit thermique, ce qui provoque la formation d'échos indépendants d'une récurrence à la suivante (*comme dans le cas du bruit seul*), dont la valeur moyenne est fixée par la force du signal utile,
- la cible fluctue, mais la fréquence varie d'une récurrence à la suivante, formant ainsi des échos de retour indépendants.

Une suite d'échos utiles a alors les mêmes propriétés qu'une suite de bruits et on peut écrire :

$$P_d = \sum_q^n C_n^i p_d^i (1 - p_d)^{n-i}$$

p_d étant quelconque, on ne peut opérer de simplifications a priori. On est donc amené à partir de la courbe p_d en fonction de $(S/B)_e$ et p_{fa} , (qui est connu dès que l'on a fixé P_{fa} et q) à tracer la courbe P_d en fonction de $(S/B)_e$.

Dans la pratique, nous calculerons P_d en fonction de p_d et P_d étant fixé, nous en déduirons p_d donc $(S/B)_e$ rapport signal sur bruit élémentaire par écho.

19.5 CAS OU LES ECHOS NE SONT PAS INDEPENDANTS

C'est le cas des cibles lentement fluctuantes (*radar à fréquence fixe, radar diversité*) où la fluctuation est double : rapide, due au bruit, lente, due à la cible.

Les différents échos ne sont pas indépendants et leur corrélation est d'autant plus forte que S/B est élevé, ce qui favorise le second effet.

19.5.1 Recherche d'une méthode de calcul

Connaissant la loi de fluctuation de la cible et la probabilité de détection P_{di} en fonction de $(S/B)_i$ pour la cible non fluctuante, on peut écrire (Cf. § 13.2) pour la cible fluctuante :

$$P_d = \sum_i P\{S/B = S_i/B_i\} \cdot P\{\text{de détection si } S/B = S_i/B_i\} = \sum_i P(S/B)_i \cdot P_{di}$$

avec :

$$P(S/B)_i = P\{(S/B)_i \leq S/B < (S/B)_i + \Delta(S/B)_i\}$$

- pour la première loi de fluctuation (cas 1) :

$$P(S/B)_i = \frac{1}{S/B} \cdot \exp\left\{-\frac{(S/B)_i}{S/B}\right\} \cdot \Delta(S/B)_i$$

- pour la seconde loi de fluctuation (cas 2) :

$$P(S/B)_i = \frac{4 \cdot (S/B)_i}{(S/B)^2} \cdot \exp\left\{-\frac{2 \cdot (S/B)_i}{S/B}\right\} \cdot \Delta(S/B)_i$$

où S/B est le rapport signal sur bruit moyen pour la cible fluctuante.

Plusieurs méthodes de calcul numérique peuvent être appliquées.

TABLEAU 9.1- Echos Indépendants

$$P_d = \sum_q^n C_n^i \cdot p_d^i \cdot (1 - p_d)^{n-i}$$

p_d		0.05	0.1	0.2	0.3	0.4
n	q					
3	1	0.14	0.27	0.49	0.66	0.78
3	2	0.0073	0.028	0.10	0.22	0.35
3	3	0.0001	0.001	0.008	0.027	0.064
5	1	0.23	0.41	0.67	0.83	0.92
5	2	0.023	0.081	0.26	0.47	0.66
5	3	0.001	0.0086	0.058	0.16	0.32
5	4	–	0.0005	0.0067	0.031	0.087
5	5	–	–	0.0003	0.0024	0.010
7	1	0.30	0.52	0.79	0.92	0.97
7	2	0.044	0.15	0.42	0.67	0.84
7	3	0.0038	0.026	0.15	0.35	0.58
7	4	0.0002	0.0027	0.033	0.13	0.29
7	5	–	0.0002	0.0047	0.029	0.096
7	6	–	–	0.00037	0.0038	0.019
7	7	–	–	–	0.0002	0.0016
10	1	0.40	0.65	0.89	0.97	0.99
10	2	0.086	0.26	0.62	0.85	0.95
10	3	0.012	0.07	0.32	0.62	0.83
10	4	0.001	0.013	0.12	0.35	0.62
10	5	–	0.0016	0.033	0.15	0.37
10	6	–	0.0002	0.0064	0.047	0.17
10	7	–	–	0.0009	0.011	0.055
10	8	–	–	–	0.0016	0.012
10	9	–	–	–	0.0001	0.0017
10	10	–	–	–	–	0.0001
20	1	0.64	0.88	0.99	1	1
20	2	0.26	0.61	0.93	0.99	1
20	3	0.075	0.32	0.79	0.96	1
20	4	0.016	0.13	0.59	0.89	0.98
20	5	0.0026	0.043	0.37	0.76	0.95
20	6	0.0003	0.011	0.20	0.58	0.87
20	7	–	0.0024	0.087	0.39	0.75
20	8	–	0.0004	0.032	0.23	0.58
20	9	–	–	0.010	0.11	0.40
20	10	–	–	0.0026	0.048	0.24
20	11	–	–	0.0006	0.017	0.13
20	12	–	–	0.0001	0.0051	0.057
20	13	–	–	–	0.0013	0.021
20	14	–	–	–	0.0003	0.0065
20	15	–	–	–	–	0.0016
20	16	–	–	–	–	0.0003
20	17	–	–	–	–	–
20	18	–	–	–	–	–
20	19	–	–	–	–	–
20	20	–	–	–	–	–

TABLEAU 9.2 - Echos Indépendants

$$P_d = \sum_q^n C_n^i \cdot p_d^i \cdot (1 - p_d)^{n-i}$$

p_d		0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
n	q					
3	1	0.88	0.94	0.97	0.99	1
3	2	0.50	0.65	0.78	0.90	0.97
3	3	0.13	0.22	0.34	0.51	0.73
5	1	0.97	0.99	1	1	1
5	2	0.81	0.91	0.97	0.99	1
5	3	0.50	0.68	0.84	0.94	0.99
5	4	0.19	0.34	0.53	0.74	0.92
5	5	0.031	0.078	0.17	0.33	0.59
7	1	0.99	1	1	1	1
7	2	0.94	0.98	1	1	1
7	3	0.77	0.90	0.97	1	1
7	4	0.50	0.71	0.87	0.97	1
7	5	0.23	0.42	0.65	0.85	0.97
7	6	0.063	0.16	0.33	0.58	0.85
7	7	0.0078	0.028	0.082	0.21	0.48
10	1	1	1	1	1	1
10	2	0.99	1	1	1	1
10	3	0.95	0.99	1	1	1
10	4	0.83	0.95	0.99	1	1
10	5	0.62	0.83	0.95	0.99	1
10	6	0.38	0.63	0.85	0.97	1
10	7	0.17	0.38	0.65	0.88	0.99
10	8	0.055	0.17	0.38	0.68	0.93
10	9	0.011	0.046	0.15	0.38	0.74
10	10	0.001	0.006	0.028	0.11	0.35
20	1	1	1	1	1	1
20	2	1	1	1	1	1
20	3	1	1	1	1	1
20	4	1	1	1	1	1
20	5	0.99	1	1	1	1
20	6	0.98	1	1	1	1
20	7	0.94	0.99	1	1	1
20	8	0.87	0.98	1	1	1
20	9	0.75	0.94	0.99	1	1
20	10	0.59	0.87	0.98	1	1
20	11	0.41	0.76	0.95	1	1
20	12	0.25	0.60	0.89	0.99	1
20	13	0.13	0.42	0.77	0.97	1
20	14	0.058	0.25	0.61	0.91	1
20	15	0.021	0.13	0.42	0.80	0.99
20	16	0.0059	0.051	0.24	0.63	0.96
20	17	0.0013	0.016	0.11	0.41	0.87
20	18	0.0002	0.0036	0.035	0.21	0.68
20	19	–	0.0005	0.0076	0.069	0.39
20	20	–	–	0.0008	0.012	0.12

TABLEAU 10.1 - Echos Indépendants

Loi inverse : $p_d = F(P_d, n, q)$

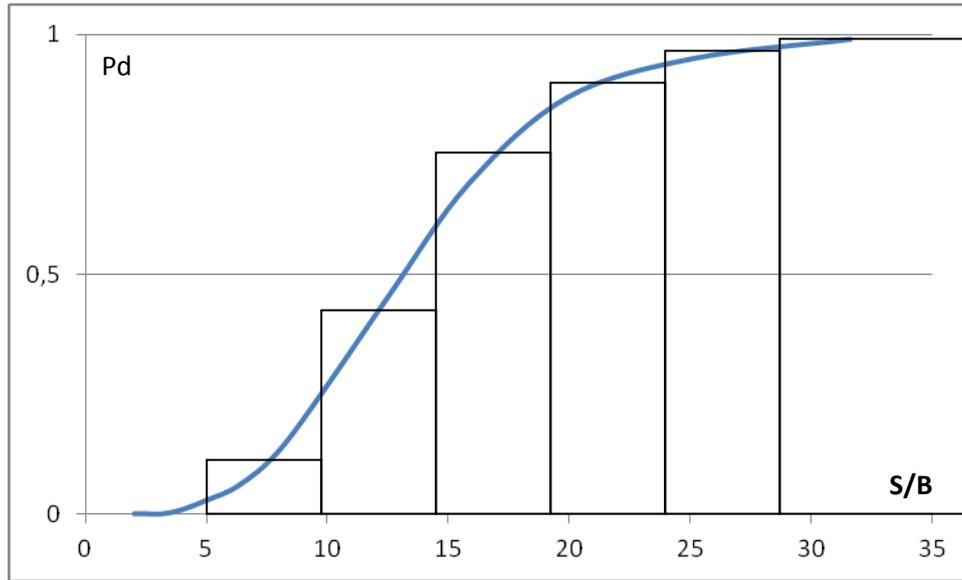
p_d		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
n	q						
3	1	0.035	0.072	0.112	0.157	0.206	0.263
3	2	0.196	0.287	0.363	0.433	0.500	0.567
3	3	0.464	0.585	0.669	0.737	0.794	0.843
5	1	0.021	0.044	0.069	0.097	0.129	0.167
5	2	0.112	0.169	0.218	0.266	0.314	0.365
5	3	0.247	0.327	0.390	0.446	0.500	0.554
5	4	0.416	0.510	0.578	0.635	0.686	0.734
5	5	0.631	0.725	0.786	0.833	0.871	0.903
7	1	0.015	0.031	0.050	0.070	0.094	0.123
7	2	0.079	0.120	0.156	0.192	0.228	0.269
7	3	0.170	0.228	0.276	0.321	0.364	0.409
7	4	0.279	0.350	0.405	0.454	0.500	0.546
7	5	0.404	0.483	0.541	0.591	0.636	0.679
7	6	0.547	0.629	0.686	0.731	0.772	0.808
7	7	0.720	0.795	0.842	0.877	0.906	0.930
10	1	0.010	0.022	0.035	0.050	0.067	0.088
10	2	0.054	0.083	0.019	0.135	0.162	0.192
10	3	0.116	0.158	0.193	0.226	0.259	0.294
10	4	0.188	0.239	0.281	0.318	0.355	0.393
10	5	0.267	0.327	0.373	0.413	0.452	0.491
10	6	0.354	0.419	0.468	0.509	0.548	0.587
10	7	0.448	0.516	0.566	0.607	0.645	0.682
10	8	0.550	0.619	0.667	0.706	0.741	0.774
10	9	0.663	0.729	0.773	0.808	0.838	0.865
10	10	0.794	0.851	0.887	0.912	0.933	0.950
20	1	0.005	0.011	0.018	0.025	0.034	0.045
20	2	0.027	0.041	0.055	0.068	0.082	0.099
20	3	0.056	0.078	0.096	0.113	0.131	0.151
20	4	0.090	0.117	0.139	0.160	0.181	0.203
20	5	0.127	0.158	0.184	0.207	0.230	0.254
20	6	0.166	0.201	0.229	0.254	0.279	0.304
20	7	0.207	0.245	0.275	0.302	0.328	0.355
20	8	0.249	0.291	0.322	0.350	0.377	0.404
20	9	0.293	0.337	0.370	0.399	0.426	0.454
20	10	0.338	0.384	0.418	0.448	0.475	0.503
20	11	0.385	0.432	0.467	0.497	0.525	0.552
20	12	0.433	0.481	0.516	0.546	0.574	0.601
20	13	0.482	0.531	0.566	0.596	0.623	0.650
20	14	0.533	0.582	0.616	0.645	0.672	0.698
20	15	0.585	0.634	0.668	0.696	0.721	0.746
20	16	0.639	0.687	0.719	0.746	0.770	0.793
20	17	0.696	0.741	0.772	0.797	0.819	0.840
20	18	0.755	0.798	0.826	0.849	0.869	0.887
20	19	0.819	0.858	0.882	0.901	0.917	0.932
20	20	0.891	0.923	0.942	0.955	0.966	0.975

TABLEAU 10.2 - Echos Indépendants

Loi inverse : $p_d = F(P_d, n, q)$

p_d		0.7	0.8	0.9	0.95	0.99
n	q					
3	1	0.331	0.415	0.536	0.632	0.785
3	2	0.637	0.713	0.804	0.865	0.941
3	3	0.888	0.928	0.965	0.983	0.997
5	1	0.214	0.275	0.369	0.451	0.602
5	2	0.422	0.490	0.584	0.657	0.778
5	3	0.610	0.673	0.753	0.811	0.894
5	4	0.782	0.831	0.888	0.924	0.967
5	5	0.931	0.956	0.979	0.990	0.998
7	1	0.158	0.205	0.280	0.348	0.482
7	2	0.314	0.371	0.453	0.521	0.643
7	3	0.459	0.517	0.596	0.659	0.764
7	4	0.595	0.650	0.721	0.775	0.858
7	5	0.724	0.772	0.830	0.871	0.929
7	6	0.844	0.880	0.921	0.947	0.977
7	7	0.950	0.969	0.985	0.993	0.999
10	1	0.113	0.149	0.206	0.259	0.369
10	2	0.227	0.271	0.337	0.394	0.504
10	3	0.333	0.381	0.450	0.507	0.612
10	4	0.434	0.484	0.552	0.607	0.703
10	5	0.532	0.581	0.646	0.696	0.782
10	6	0.627	0.673	0.733	0.778	0.850
10	7	0.719	0.761	0.812	0.850	0.907
10	8	0.807	0.842	0.884	0.913	0.952
10	9	0.891	0.917	0.945	0.963	0.984
10	10	0.965	0.978	0.990	0.995	0.999
20	1	0.058	0.077	0.109	0.139	0.206
20	2	0.118	0.142	0.181	0.216	0.289
20	3	0.174	0.202	0.245	0.283	0.358
20	4	0.228	0.259	0.304	0.344	0.421
20	5	0.281	0.313	0.361	0.401	0.478
20	6	0.332	0.366	0.415	0.456	0.532
20	7	0.384	0.418	0.467	0.508	0.583
20	8	0.434	0.469	0.518	0.558	0.631
20	9	0.484	0.519	0.567	0.606	0.677
20	10	0.533	0.568	0.615	0.653	0.720
20	11	0.582	0.616	0.662	0.698	0.761
20	12	0.630	0.663	0.707	0.741	0.800
20	13	0.678	0.709	0.751	0.783	0.837
20	14	0.725	0.755	0.793	0.823	0.871
20	15	0.771	0.799	0.834	0.860	0.902
20	16	0.816	0.842	0.873	0.896	0.931
20	17	0.861	0.883	0.910	0.929	0.956
20	18	0.904	0.922	0.944	0.958	0.977
20	19	0.945	0.959	0.973	0.982	0.992
20	20	0.982	0.989	0.995	0.997	0.999

19.5.2 Calcul de l'intégrale sur n zones de $\Delta(S/B)_i$ fini, plus une allant jusqu'à $S/B \rightarrow \infty$



P_d (S/B) cible non fluctuante.

On choisira $(S/B)_{n+1}$ tel que $P_{d(n+1)} \cong 0,9999$, Ce qui amène deux relations. Pour la première loi de fluctuation :

$$P_d = \sum_1^n P_{di} \cdot \frac{1}{S/B} \cdot \exp\left\{-\frac{(S/B)_i}{S/B}\right\} \cdot \Delta(S/B)_i + \exp\left\{-\frac{(S/B)_J}{S/B}\right\}$$

avec :

$$(S/B)_J = \frac{1}{2}((S/B)_{n+1} + (S/B)_n)$$

et pour la seconde loi de fluctuation :

$$P_d = \sum_1^n P_{di} \frac{4(S/B)_i}{(S/B)^2} \exp\left\{-\frac{2(S/B)_i}{S/B}\right\} \Delta(S/B)_i + \exp\left\{-\frac{2(S/B)_J}{S/B}\right\} \cdot \left(1 + \frac{2(S/B)_J}{S/B}\right)$$

On notera que dans cette dernière expression, la loi de probabilité employée qui ne concerne que la cible, est ici une loi exacte, cette expression intégrale doit donc permettre d'atteindre la valeur exacte de la relation $P_d(S/B)$ dans le cas de la seconde loi de fluctuation

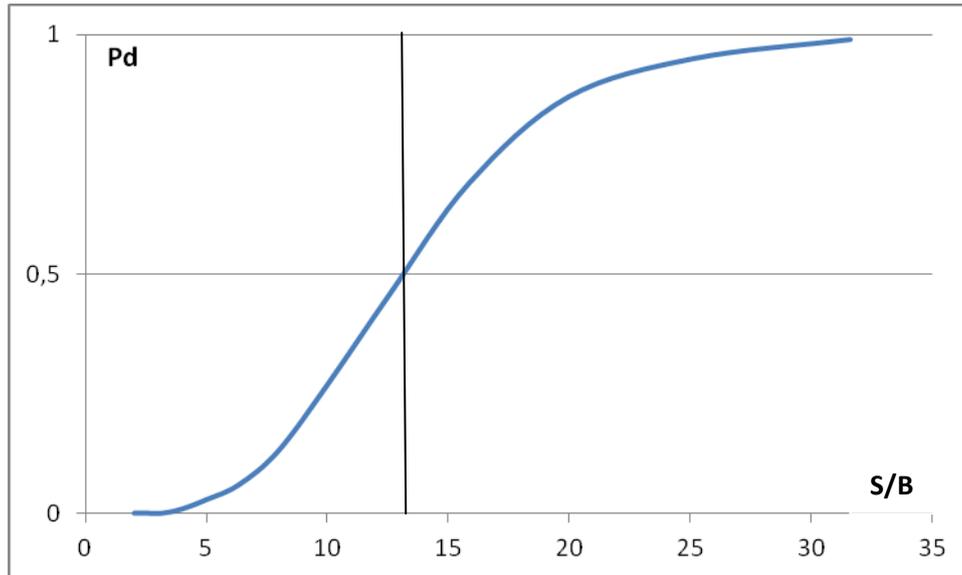
A titre de vérification on a recalculé les S/B des tableaux 2 et 3 à partir des données du tableau 1 (élargies à $P_{di} = 0,9999$). Pour ce qui concerne le tableau 2, les résultats concordent à mieux que 0,05 dB près, ce qui conforte l'exactitude de la méthode dans le premier cas de fluctuation. Pour le tableau n° 3 l'écart moyen (en valeur absolue) est de l'ordre de 0,3 dB pour $p_{fa} = 10^{-3}$ et inférieur à 0,2 dB pour $p_{fa} = 10^{-6}$ et $P_d \geq 0,2$, ce qui confirme le bien fondé de l'approximation retenue pour le second cas de fluctuation.

19.5.3 Approximation du calcul de la loi intégrale. Lois simplifiées.

L'allure symétrique de la loi $P_d\{(S/B)_i\}$ pour la cible non fluctuante, laisse penser que, en première approximation, on peut la remplacer par une loi, égale à :

- 0 pour $(S/B)_i < S/B_0$
- 1 pour $(S/B)_i \geq S/B_0$

en prenant comme centre de symétrie S/B_0 tel que : $P_d(S/B_0) = 0,5$



Pd (S/B) cible non fluctuante.

LES LOIS SIMPLIFIÉES correspondantes sont alors :

$$P_{d1} = \exp\left\{-\frac{S/B_0}{S/B}\right\}$$

pour le **premier cas de fluctuation** :

$$P_{d3} = \exp\left\{-\frac{2 S/B_0}{S/B}\right\} \cdot \left(1 + \frac{2 S/B_0}{S/B}\right)$$

pour le **deuxième cas de fluctuation**.

Ces lois simplifiées ont été comparées aux calculs directs des paragraphes 12.4 et 12.5 ; l'écart de rapport signal sur bruit à P_d et P_{fa} donnés entre les lois simplifiées et les calculs directs est donné ci-après dans différents cas :

Première loi de fluctuation :

L'inversion de la loi s'obtient facilement en écrivant, en dB :

$$S/B_{e1} = 10 \log \left(\frac{-S/B_0}{\ln(P_d)} \right)$$

Les écarts (en dB) entre le S/B ainsi obtenu et celui issu du calcul direct sont donnés dans le tableau ci-après.

$P_{fa} \backslash P_d$	0,3	0,5	0,9	0,99
10^{-3}	+ 0,5	+ 0,1	- 0,25	- 0,30
10^{-6}	+ 0,25	+ 0,1	- 0,05	- 0,15
10^{-9}	+ 0,15	+ 0,05	- 0,05	- 0,10

Deuxième loi de fluctuation

Dans ce cas la loi n'est pas directement inversable sauf par calcul numérique. Le tableau suivant permet de réaliser cette inversion en fonction du rapport :

$$Q = (S/B)_0 / (S/B)$$

P _d	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,99
Q	2,37	1,945	1,50	1,22	1,01	0,839	0,688	0,549	0,412	0,266	0,178	0,074

On écrira ensuite selon la valeur de P_d recherchée :

$$S/B_{e3} = 10 \cdot \log(S/B_0 / Q), \text{ en dB}$$

Les écarts de S/B (en dB) avec le calcul direct sont donnés dans le tableau ci-après :

P _d	0,3	0,5	0,9	0,99
P _{fa}				
10 ⁻³	+0,5	+ 0,2	- 0,2	- 0,3
10 ⁻⁶	+0,25	+ 0,1	- 0,05	- 0,15
10 ⁻⁹	+0,15	+ 0,05	- 0,05	- 0,10

Les résultats obtenus sont très proches pour les deux cas de fluctuation. Si on excepte le point P_{fa} = 10⁻³, P_d = 0,3, les écarts sont inférieurs à 0,3 dB et leur moyenne, en valeur absolue, est voisine de 0,15 dB.

Ces très bons résultats se dégradent ensuite pour les P_d faibles qui ne correspondent pas en pratique à des cas d'utilisation. On peut donc considérer ces lois simplifiées comme applicables pour P_d ≥ 0,3 et P_{fa} ≤ 10⁻³.

19.5.4 Application aux extracteurs

Ce même principe peut également être appliqué après extraction, dans la mesure où la loi de probabilité P_d (S/B_i) conserve ses propriétés de symétrie. La méthode consiste alors à P_d, P_{fa}, n et q donnés :

à calculer sur la cible non fluctuante (Swerling 0) :

- la probabilité de fausse alarme à l'entrée de l'extracteur p_{fa} (P_{fa}, n, q).
- la probabilité de détection p_{d0}(0,5, n, q) permettant d'obtenir P_d = 0,5 en sortie de l'extracteur.
- le rapport signal sur bruit correspondant à p_{d0}, p_{fa}

$$S/B_0(p_{d0}, p_{fa}).$$

à reporter ce S/B₀ dans la loi simplifiée correspondant à la fluctuation étudiée, pour obtenir la valeur du rapport signal sur bruit :

$$S/B_e(P_d, S/B_0)$$

correspondant à la probabilité de détection recherchée.

Exemple : P_d = 0,9, P_{fa} = 10⁻⁹, n = 10, q = 5

Les relations du paragraphe 19.4 permettent d'écrire :

$$p_{fa} = 5,24 \cdot 10^{-3} \text{ et } p_{d0} = 0,452$$

on calcule alors pour la cible non fluctuante par la relation du § 11.6 :

$$S/B_0 = 6,4 \text{ dB (4,37)}$$

en inversant la relation simplifiée pour la **première loi de fluctuation** on arrive à :

$$(S/B)_{e1} = \frac{-S/B_0}{\ln(0,9)} = \frac{-4,37}{\ln(0,9)} = 41,48$$

$$(S/B)_{e1} = 16,2 \text{ dB}$$

On peut alors facilement trouver le rapport signal sur bruit correspondant à d'autres probabilités de détection globales, en utilisant la dernière relation.

De même pour $P_d = 0,5$ on trouve directement :

$$(S/B)_{e1} = 10 \log (-4,37/\ln(0,5)) = 8 \text{ dB}$$

Pour la **seconde loi de fluctuation** on utilise le tableau d'inversion du § précédent, soit pour

$$P_d = 0,9 : Q = 0,266$$

$$(S/B)_{e3} = 10 \log (4,37/0,266)$$

$$(S/B)_{e3} = 12,2 \text{ dB}$$

de même pour $P_d = 0,5$, $Q = 0,839$

$$(S/B)_{e3} = 10 \log (4,37/0,839) = 7,2 \text{ dB}$$

19.5.5 Calcul direct d'un gain de post-intégration dû a l'extracteur

L'approximation précédente laisse a penser que pour l'essentiel, la loi de détection après passage dans l'extracteur est fonction du seul paramètre S/B_0 , obtenue en regardant l'action de l'extracteur sur une cible non fluctuante.

Cette constatation rejoint celle exprimée au paragraphe 16.2.4 qui conclue que, en pratique, le gain de post intégration ne dépend que très peu du mode de fluctuation de la cible dès lors qu'elle peut être considérée comme lente.

Il apparaît donc que l'on peut étendre cette propriété à la post-intégration réalisée par un extracteur, d'où la méthode de calcul suivante :

Estimation du gain de post-intégration de l'extracteur pour le critère choisi sur une cible non fluctuante (Swerling 0) soit à P_d , P_{fa} , n et q donné :

- calculer la probabilité de fausse alarme à l'entrée de l'extracteur $p_{fa}(P_{fa}, n, q)$
- calculer la probabilité de détection à l'entrée de l'extracteur $p_d(P_d, n, q)$.
- calculer le rapport signal sur bruit sur cible non fluctuante pour les valeurs trouvées de p_d et p_{fa} (Cf. § 11.6) :
- $S/B_{nq,0}(p_d, p_{fa})$
- calculer sur une impulsion (Cf. § 11.3 ou tableau 1) le rapport signal sur bruit sur cible non fluctuante correspondant à P_d et P_{fa} .
- $S/B_{10}(P_d, P_{fa})$
- calculer le gain de post-intégration de l'extracteur (en dB)

$$g(n, q) = S/B_{10} - S/B_{nq,0}$$

Application de ce gain de post-intégration à la cible lentement fluctuante ce qui permet d'écrire en dB :

1^{er} cas de fluctuation (Swerling 1)

$$\left(\frac{S}{B}\right)_{e1} = \left(\frac{S}{B}\right)_{11} - g(n, q) = \left(\frac{S}{B}\right)_{11} - \left(\frac{S}{B}\right)_{10} + \left(\frac{S}{B}\right)_{nq,0}$$

S/B_{11} étant défini par la relation du paragraphe 12.4 (tableau 2).

2^e cas de fluctuation (Swerling 3)

$$\left(\frac{S}{B}\right)_{e3} = \left(\frac{S}{B}\right)_{13} - g(n, q) = \left(\frac{S}{B}\right)_{13} - \left(\frac{S}{B}\right)_{10} + \left(\frac{S}{B}\right)_{nq,0}$$

S/B_{13} étant défini par la relation du paragraphe 12.5 (tableau 3).

Exemple : $P_d = 0,9$, $P_{fa} = 10^{-9}$, $n = 10$, $q = 5$, Swerling 1.

Les relations du paragraphe 18.4 permettent d'écrire :

$$p_{fa} = 5,24 \cdot 10^{-3}; p_d = 0,655$$

d'où les rapports signal sur bruit en cible non fluctuante (§ 11.6)

$$S/B_{nq,0} = 7,8 \text{ dB}; S/B_{10} = 14,7 \text{ dB}; g(10, 5) = 14,7 - 7,8 = 6,9 \text{ dB}$$

d'où le rapport signal sur bruit en cible fluctuante (§ 12.4) avec $(S/B)_{11} = 22,9 \text{ dB}$

$$S/B_{e1} = 22,9 - 6,9 = 16,0 \text{ dB}$$

Pour la seconde loi de fluctuation $(S/B)_{13} = 18,9 \text{ dB}$

$$S/B_{e3} = 18,9 - 6,9 = 12,0 \text{ dB}$$

Valeurs à comparer avec les 16,2 dB et 12,2 dB obtenus par la méthode précédente.

A noter que dans ce cas pour une autre valeur de P_d le calcul est à reprendre entièrement.

19.5.6 Validité des deux méthodes approchées

L'exemple traité montre une bonne coïncidence entre les résultats obtenus par les deux méthodes, qui coïncident à mieux que 0,2 dB près.

Pour vérifier cette cohérence et la validité de ces lois approchées, celles-ci ont été comparées aux lois intégrales pour un extracteur traitant 10 impulsions, pour $q = 1$ à 10 et p_{fa} variant de 10^{-3} à 10^{-9} .

a - Premier cas de fluctuation

Pour $P_d = 0,5$ l'écart entre les lois approchées et la loi intégrale reste inférieur à 0,15 dB avec une moyenne proche de 0,05 dB.

Pour $P_d = 0,9$ les écarts typiques sont donnés ci-après :

P_{fa} \ lois	Loi simplifiée		Calcul de $g(n, q)$	
	Écart max	Écart moyen	Écart max	Écart moyen
10^{-3}	0,4 dB	0,25 dB	0,6 dB	0,5 dB
10^{-6}	0,5 dB	0,2 dB	0,5 dB	0,35 dB
10^{-9}	0,5 dB	0,2 dB	0,35 dB	0,3 dB

Les écarts moyens sont calculés en valeur absolue.

b - Deuxième cas de fluctuation

Pour $P_d = 0,5$ l'écart moyen est de l'ordre de 0,05 dB pour la loi simplifiée avec un maximum de 0,15 dB. Un écart moyen est de l'ordre de 0,1 dB pour le calcul par $g(n, q)$ avec un maximum de 0,3 dB.

Pour $P_d = 0,9$ les écarts typiques sont donnés ci-après :

P_{fa} \ lois	Loi simplifiée		Calcul de $g(n, q)$	
	Écart max	Écart moyen	Écart max	Écart moyen
10^{-3}	0,75 dB	0,40 dB	0,80 dB	0,70 dB
10^{-6}	0,45 dB	0,25 dB	0,60 dB	0,45 dB
10^{-9}	0,35 dB	0,15 dB	0,55 dB	0,30 dB

c - Récapitulation**Premier cas de fluctuation (Swerling 1) :**

Les deux méthodes conduisent à une approximation raisonnable et sont de complexité équivalente. La première méthode conduit à une erreur moyenne un peu plus faible et à une erreur dans la zone de S/B_e minimale de l'ordre de 0,2 dB.

Second cas de fluctuation (Swerling 3),

La première méthode conduit à une approximation raisonnable pour $P_{fa} = 10^{-3}$ où son écart dans la zone de S/B_e minimale est de l'ordre de 0,35 dB, et donne d'excellents résultats pour $P_{fa} = 10^{-6}$ et 10^{-9} où son écart dans la zone de S/B_e minimale est inférieur à 0,2 dB. La seconde méthode donne des résultats moins précis et ne paraît devoir être employée que pour $P_{fa} \leq 10^{-6}$.

Globalement, la première méthode de calcul donne toujours des résultats plus précis que la seconde, elle paraît donc préférable quoique son approche soit un peu moins facile.

Par contre, la seconde méthode reste applicable pour les radars à diversité, alors qu'il n'existe pas dans ce cas de loi simplifiée.

19.6 RECAPITULATION EMPLOI PRATIQUE DES RESULTATS

On considérera une mesure complète ou « plot » formée de n mesures élémentaires ou « échos ». Deux cas sont à prendre en compte selon que les échos sont indépendants ou liés.

19.6.1 ECHOS INDEPENDANTS

Condition de réalisation : la cible ne fluctue pas (c'est alors le bruit qui crée l'indépendance entre les échos), ou le radar est à fréquence suffisamment variable d'un écho au suivant (radar aléatoire), ou la cible possède une fluctuation rapide naturelle (cas de certains type de fouillis).

Le calcul des conditions à remplir à l'entrée de l'extracteur en fonction de P_d , n et q fait appel aux lois suivantes :

$$P_{fa} \approx C_n^q \cdot p_{fa}^q$$

$$P_d = \sum_q^n C_n^i p_d^i (1 - p_d)^{n-i}$$

Après calcul de la probabilité de fausse alarme $p_{fa}(P_{fa}, n, q)$ et de la probabilité de détection $p_d(P_d, n, q)$ par inversion des relations (voir tableaux 10.1 et 10.2 pages 84 et 85).

On en déduit le rapport signal sur bruit par écho à l'entrée de l'extracteur.

- Cible non fluctuante S/B_e en fonction de p_d et p_{fa} est donné par les relations du paragraphe 11.3 page 40.
- Cible fluctuante radar aléatoire, S/B_e en fonction de p_d et p_{fa} est donné par les relations des paragraphes 12.4 page 44 et 12.5 page 45.

19.6.2 ECHOS LIES

Condition de réalisation : c'est le cas des radars à fréquence fixe ou à diversité à 2 ou 3 voies, pour les cibles lentement fluctuantes (cas pratique des mobiles habituels, fouillis de sol,...)

Deux méthodes sont proposées qui toutes deux regardent l'effet de l'extracteur sur une cible non fluctuante.

a - Lois simplifiées

On calcule dans un premier temps $p_{fa}(P_{fa}, n, q)$ et $p_{d0}(0,5, n, q)$ par inversion des relations du paragraphe 19.1 (tableaux 10.1 et 10.2 pages 84 et 85) puis du S/B_0 (p_{d0}, p_{fa}) pour une cible non fluctuante.

On calcule alors le S/B_e , rapport signal sur bruit à l'entrée de l'extracteur par application de l'une des relations suivantes :

Premier cas de fluctuation. (Swerling 1)

$$S/B_{e1} = 10 \log \left(\frac{-S/B_0}{\ln(P_d)} \right)$$

Deuxième cas de fluctuation. (Swerling 3)

$$(S/B)_{e3} = 10 \log (S/B_0 / Q)$$

avec :

P_d	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,99
Q	2,37	1,95	1,50	1,22	1,01	0,84	0,69	0,55	0,41	0,266	0,178	0,074

b - Calcul du gain de post-intégration de l'extracteur

On calcule dans un premier temps $p_{fa}(P_{fa}, n, q)$ et $p_d(P_d, n, q)$ par inversion des relations du paragraphe 19.1 tableaux 10.1 et 10.2 pages 84 et 85, puis du rapport signal sur bruit à l'entrée de l'extracteur par écho pour une cible non fluctuante : S/B_{nq0} (p_d, p_{fa}).

On calcule ensuite pour la cible non fluctuante le rapport signal sur bruit par écho donnant directement P_d et P_{fa} : $S/B_{10}(P_d, P_{fa})$, et on écrit :

$$g(n, q) = S/B_{10} - S/B_{nq0}$$

La loi pour le calcul de ces S/B est celle du paragraphe 12.4 page 44. On calcule enfin le rapport signal sur bruit à l'entrée de l'extracteur par application de l'une des relations suivantes :

Premier cas de fluctuation. (Swerling 1)

$$\left(\frac{S}{B}\right)_{e1} = \left(\frac{S}{B}\right)_{11} - g(n, q) = \left(\frac{S}{B}\right)_{11} - \left(\frac{S}{B}\right)_{10} + \left(\frac{S}{B}\right)_{nq0}$$

S/B_{11} étant donné par la relation du paragraphe 12.4, page 44 ou par le tableau 2 page 46.

Deuxième cas de fluctuation. (Swerling 3)

$$\left(\frac{S}{B}\right)_{e3} = \left(\frac{S}{B}\right)_{13} - g(n, q) = \left(\frac{S}{B}\right)_{13} - \left(\frac{S}{B}\right)_{10} + \left(\frac{S}{B}\right)_{nq0}$$

S/B_{13} étant défini par la relation du paragraphe 12.5 page 45 ou par le tableau 3 page 46.

Radar à Diversité

on pourra toujours employer une relation de la forme :

$$\left(\frac{S}{B}\right)_{ev} = \left(\frac{S}{B}\right)_{nv} - g(n, q) = \left(\frac{S}{B}\right)_{nv} - \left(\frac{S}{B}\right)_{10} + \left(\frac{S}{B}\right)_{nq0}$$

Où S/B_{ev} est le rapport signal sur bruit par écho et par voie à l'entrée de l'extracteur et S/B_{nv} est calculé par la méthode définie au paragraphe 17.3 page 98/84 $g(n, q)$ venant ensuite se substituer au $g(n)$ de la post-intégration.

Pour avoir un rapport signal sur bruit comparable aux précédents on écrira :

$$\left(\frac{S}{B}\right)_e = \left(\frac{S}{B}\right)_{ev} + 10 \log (nv)$$

20 LEXIQUE DES TABLES ET PLANCHES
POUR LE CALCUL
DU RAPPORT SIGNAL SUR BRUIT ELEMENTAIRE (S/B)_e
EN FONCTION DE Pd ET Pfa

	Relations	Tables	Méthode
Cible non fluctuante 1 écho	40	40	§ 17.1 page 83
Cible {cas 1 fluctuante 1 écho {cas 2	44 45	46 46	§ 17.2 pages 83
Radar diversité {cas 1 {cas 2	57 58	59 et 60 59 et 61	§ 17.3 pages 83/84
Radar aléatoire {cas 1 {cas 2	78 78	59 et 60 59 et 61	§ 17.4 page 84
Gain de post-intégration Cible non fluctuante	69	70	§ 17.1 page 83
Gain de post-intégration Cible lentement fluctuante	76	77	§ 17.2 page 83
Extracteurs échos indépendants	90	91 à 94	§ 19.3 page 89
Echos liés	90	–	–
Méthode simplifiée	95	–	§ 19.5.3 Pages 95/97
Méthode du gain d'extraction	98	–	§ 19.5.5 Pages 97/98

LOIS EMPIRIQUES DE POST - INTÉGRATION § 16.4 page 82.

CALCULATEUR DE RAPPORT SIGNAL SUR BRUIT § 18 pages 85/87