

Chapitre 16

LE SIGNAL RADAR

Données théoriques de base

1	CARACTERISTIQUES GENERALES DU SIGNAL	3
1.1	LE SIGNAL RADAR : DEFINITIONS GENERALES	3
1.2	PUISSANCE ET ENERGIE D'UN SIGNAL.....	4
1.3	SPECTRE DES SIGNAUX REELS - NOTION DE FILTRAGE	7
1.4	SIGNAL VIDEO COMPLEXE.....	12
1.5	RETARD ET INVERSION DU TEMPS.....	17
2	SIGNAUX ALEATOIRES, DEFINITIONS ET PROPRIETES.....	17
2.1	NOTION DE VARIABLE ALEATOIRE.....	17
2.2	NOTION DE FONCTION ALEATOIRE.....	18
2.3	DENSITE SPECTRALE DES SIGNAUX ALEATOIRES.....	19
2.3.1	Théorème de corrélation – Théorème de PARSEVAL	19
2.3.2	Cas des signaux aléatoires	20
2.4	FILTRAGE LINEAIRE D'UN SIGNAL ALEATOIRE	21
2.5	FONCTION D'AUTOCORRELATION	21
2.5.1	Signaux d'expression connue, ou « déterministes ».....	21
2.5.2	Cas des signaux aléatoires	22
2.5.3	Propriétés de la fonction d'autocorrélation.....	22
2.5.4	Allures caractéristiques.....	22
2.5.5	Dérivation de $\rho(\tau)$ par rapport à τ	23
2.6	PROCEDES PRATIQUES DE CORRELATION	24
2.6.1	Intégration en vidéo fréquence.....	24
2.6.2	Intégration sous porteuse	24
2.6.3	Comportement pratique des filtres intégrateurs	25
2.6.4	Généralisation aux filtres réels.....	26
2.6.5	Notion de corrélation numérique.....	26
3	LE BRUIT COMPORTEMENT TEMPOREL ET SPECTRAL	27
3.1	LE BRUIT, FONCTION ALEATOIRE DU TEMPS	27
3.2	MODELE DE BRUIT SOUS PORTEUSE.....	27
3.3	MODELES DE BRUIT DETECTES	29
3.3.1	Détecteur quadratique	29
3.3.2	Démodulateur.....	29
3.4	PUISSANCE DU BRUIT THERMIQUE, BRUIT BLANC	29
3.5	PUISSANCE D'UN BRUIT NON BLANC.....	30
3.6	DENSITE SPECTRALE DU BRUIT.....	31
3.7	BRUIT VIDEO COMPLEXE	31
3.7.1	Définition	31
3.7.2	Variance de $N(t)$	31
3.7.3	Loi de probabilité de $N(t)$	32
3.7.4	Filtre vidéo équivalent	32
4	SIGNAUX RADAR CARACTERISTIQUES – PROPAGATION	33
4.1	SIGNAUX UTILISE EN RADAR	33
4.2	SIGNAUX REÇUS APRES PROPAGATION - EFFET DOPPLER (<i>théorie non relativiste</i>).....	34
4.3	ECHANTILLONNAGE DES SIGNAUX RADAR.....	36
4.3.1	Théorème de Shannon	37
4.3.2	Critères pratiques d'application	38
4.3.3	Echantillons de durée non nulle	39
4.4	PUISSANCES ET ENERGIES DES SIGNAUX RADAR	40
5	ANNEXE EFFET DOPPLER RELATIVISTE	42
5.1	RAPPEL DE CINEMATIQUE RELATIVISTE.....	42
5.2	CALCUL DE L'EFFET DOPPLER EN MILIEU NON RELATIVISTE.....	44
5.3	APPLICATION EN MILIEU RELATIVISTE	46
5.3.1	Particularités du milieu relativiste.....	46
5.3.2	Onde se propageant selon ox ; trajet aller.....	47
5.3.3	Onde se propageant selon ox ; trajet retour	47
5.3.4	Onde se propageant perpendiculairement à ox , effet doppler transversal	48

0 PRELIMINAIRE

Nous avons déterminé au chapitre 9 la condition théorique à imposer à un filtre idéal (*ou : filtre optimal, filtre adapté*) qui permet d'obtenir le meilleur rapport signal sur bruit à partir d'un bilan énergétique fixé par l'équation du radar :

Condition qui se résume à :

$$F(f) = H^*(f), \text{ ce qui entraîne : } S/B = E/b, \text{ Avec :}$$

- $F(f)$: transmittance du filtre optimal ;
- $H(f)$: spectre du signal utile ;
- S : puissance crête du signal en moyenne fréquence ;
- B : puissance moyenne du bruit en moyenne fréquence ;
- E : énergie du signal utile perçu par le radar ;
- b : densité spectrale du bruit accompagnant le signal utile.

E et b étant calculés au point de référence du radar (*entrée du premier élément actif*), et b tenant compte des bruits additionnels de tous les éléments de la chaîne, suivant une méthode de calcul définie au chapitre 6.

Dans les radars «classiques» (*qui doivent sans doute leur dénomination à une ancienne querelle littéraire*), on se contente d'émettre des impulsions de fréquence et de phase bien déterminées qui, pour des raisons liées aux possibilités des émetteurs, sont en outre de puissance constante.

Le traitement moyenne fréquence est alors limité à un filtrage impulsion par impulsion, effectué à l'aide de filtres proches du filtre adapté au signal émis et dont le rendement est voisin de 0,8 (perte 1dB)

Des traitements complémentaires sont en outre effectués en vidéofréquence pour améliorer la détection du radar. Il en résulte qu'à une qualité de détection fixée par les besoins opérationnels, correspond un certain rapport signal sur bruit par impulsion S/B donc un rapport énergétique donné E/b .

La durée des impulsions du radar est fixée (*cf; chapitre 1*) par le pouvoir discriminateur en distance demandé au radar, ce qui fait que **l'ensemble des conditions :**

- qualité de la détection ;
- paramètres liés au radar (équation du radar) ;
- pouvoir discriminateur en distance ;

fixe, dans le cas des radars classiques, la puissance crête du radar.

Dans les récepteurs «modernes» (*la même querelle servant toujours de référence*), on a voulu s'affranchir de cette contrainte, l'évolution de la technologie permettant d'augmenter dans une large mesure la puissance moyenne des émetteurs, mais peu leur puissance de crête.

Par ailleurs, le maintien de puissances crêtes élevées ne va pas sans difficultés : hautes tensions très élevées, rayonnement nocifs (*rayons X...*) difficulté de réalisation des circuits hyperfréquences, etc. Ce qui fait qu'il est plus facile d'utiliser des signaux de puissance moyenne élevée et de puissance crête faible, que des signaux de puissance crête très élevée.

Les idées de base des récepteurs modernes sont les suivantes :

- les caractéristiques de précision et de pouvoir discriminateur en distance d'un radar sont liées non pas aux caractéristiques temporelles du signal émis, mais à celles du signal reçu, lesquelles peuvent être modifiées par un traitement réception adéquat ;

- il en va de même pour les caractéristiques fréquentielles et le pouvoir discriminatoire en vitesse ;
- la seule condition à réaliser est celle du filtrage optimal ;
- la manière de réaliser ce filtrage optimal peut être liée à la nature du signal émis.

Sur ces idées de base, ont été réalisés des récepteurs qui utilisent à l'émission des signaux, ou suites de signaux, codés, et à la réception des circuits de décodage adaptés à la nature des signaux émis.

Ceci permet d'introduire un nouveau moyen d'action dans le compromis : portée – précision – pouvoir discriminatoire d'un radar, la condition finale portant alors sur la puissance moyenne émise.

Dans les chapitres qui vont suivre, le concept de récepteur optimal et les performances théoriques qui en découlent, ainsi que l'application de ce concept à l'étude des récepteurs linéaires, vont être développés. Le présent chapitre a pour but de réunir les connaissances théoriques qu'il est bon de posséder pour aborder ces différents aspects de la théorie des récepteurs modernes.

On y trouvera une synthèse de toutes les informations utiles concernant :

- le signal : puissance, spectre, signal vidéo complexe, en compléments des notions déjà exposées au chapitre 8 ;
- les théories générales concernant les signaux aléatoires ainsi que les notions de densité spectrale, filtrage des signaux aléatoires, fonction d'autocorrélation... et leur application au bruit ;
- l'application de ces notions à l'étude du comportement temporel et spectral de bruit déjà exposé pour partie au chapitre 10 ;
- l'application de ces notions au signal radar, pour préciser ses caractéristiques, son évolution au cours de la propagation et son échantillonnage.

1 CARACTERISTIQUES GENERALES DU SIGNAL

1.1 LE SIGNAL RADAR : DEFINITIONS GENERALES

Le signal radar, porté par l'onde électromagnétique, est en général un signal à bande étroite, ce qui permet de l'écrire sous la forme générale :

$$A_s(t) = A(t) \cos(2\pi f_c t + \varphi(t))$$

ou

$$A_s(t) = X(t) \cos(2\pi f_c t) + Y(t) \cos(2\pi f_c t + \pi/2)$$

avec

$$X(t) = A(t) \cos(\varphi(t)) \text{ et } Y(t) = A(t) \sin(\varphi(t))$$

$A(t)$ est la modulation d'amplitude du signal, $\varphi(t)$ comprend plusieurs termes :

- un terme éventuel de modulation de phase du signal ;
- un terme lié à un éventuel effet doppler : $\varphi_d = 2\pi f_d t$;
- une phase à l'origine inconnue : φ_0 .

Toute l'information utile du signal est contenue dans $A(t)$ et $\varphi(t)$. La présence de la phase inconnue φ_0 vient compliquer le traitement du signal, qui devra se faire en moyenne fréquence ou par le traitement du signal vidéo complexe :

$$Z(t) = X(t) + jY(t)$$

$Z(t)$ contient toute l'information utile du signal radar.

Le bruit qui accompagne le signal radar, à l'exception de certains bruits « colorés » de brouilleurs, a pour expression :

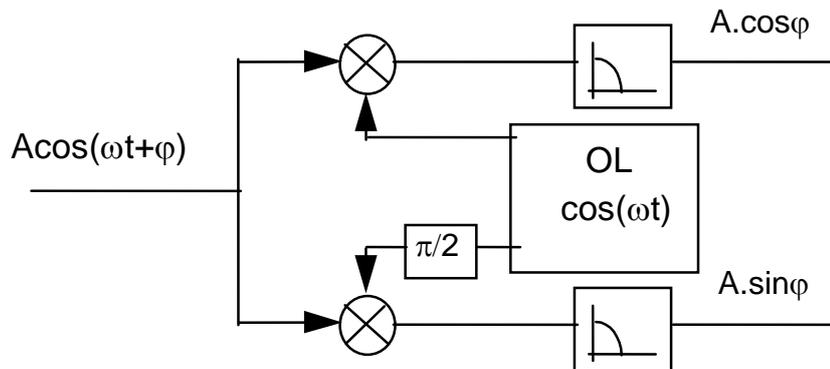
$$n(t) = \alpha(t)\cos(2\pi f.t) + \beta(t)\cos(2\pi f.t + \pi/2)$$

où α et β sont des fonctions aléatoires du temps, gaussiennes, de valeur moyenne nulle et de variance égale à la puissance moyenne du bruit : B .

On lui associe un bruit vidéo complexe :

$$N(t) = \alpha(t) + j\beta(t)$$

Ces signaux et bruit complexes sont obtenus par une double démodulation du signal reçu comme illustré par le schéma de principe suivant, :



ou par échantillonnage direct du signal sous porteuse.

On verra au paragraphe suivant que, toutes choses égales par ailleurs, le signal vidéo complexe comme le bruit vidéo complexe sont de puissance double des signaux et bruit sous porteuse.

En conséquence, le rapport signal sur bruit est le même, sous porteuse et après double démodulation.

1.2 PUISSANCE ET ENERGIE D'UN SIGNAL

Les notions de puissance et d'énergie peuvent paraître familières, il semble cependant utile d'apporter les précisions suivantes.

a. Puissance instantanée d'un signal

Quelle que soit la nature du signal sa puissance instantanée se définit comme le carré de son amplitude.

$$P_i = A_1^2(t)$$

b. Energie d'un signal

L'énergie d'un signal est par définition l'intégrale (quand elle existe) de la puissance instantanée de ce signal.

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} P_i(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} A_1^2(t) dt$$

c. Puissance efficace d'un signal

Par définition, la puissance efficace d'un signal est son énergie par unité de temps, , d'où les définitions suivantes

- Signal de durée finie :

$$W = \frac{E}{T} = \overline{A_1^2(t)}$$

ou

$$W = \frac{1}{\Delta T} \int_{T_0}^{T_0+\Delta T} A_1^2(t) dt$$

- Signal de durée infinie :

$$W = \lim_{T \Rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T A_1^2(t) dt$$

On résumera ces différentes expressions en disant que la puissance efficace est la valeur moyenne du carré de l'amplitude d'un signal sur une période donnée.

$$W = \overline{A_1^2(t)}$$

Selon qu'elle soit observée sur la totalité du signal ou sur la tranche où il est maximum, on parlera de puissance moyenne P_m ou de puissance crête P_c .

d. Signal vidéofréquence

Pour un signal sans porteuse :

$$A_1(t) = A(t)$$

$$P_i = W = A^2(t)$$

$$E = \int A^2(t) dt$$

e. Signal sous porteuse

Pour un signal sous porteuse d'expression :

$$A_1(t) = A(t) \cos(2\pi f.t + \varphi(t))$$

$$P_i = A_1^2(t) = A^2(t) \cos^2(2\pi f.t + \varphi)$$

$$E = \int A^2(t) \cos^2(2\pi f.t + \varphi) dt$$

$$E = \frac{1}{2} \int A^2(t) dt$$

$$W = \frac{A^2(t)}{2}$$

En particulier lorsque $A(t)$ passe par sa valeur maximale A_0 , W devient la puissance crête P_c du signal :

$$P_c = \frac{A_0^2}{2}$$

Pour un tel signal on définira une durée équivalente :

$$\Delta T = \frac{E}{P_c}$$

$$\Delta T = \frac{\int A^2(t) dt}{A_0^2}$$

Cette notion, généralisable à tout type de signal, sera à rapprocher de la largeur de spectre équivalente définie plus loin.

f. Signal vidéo complexe

La puissance d'un signal vidéo complexe :

$$Z(t) = X(t) + jY(t) = A(t)\exp\{j.\phi(t)\}$$

Se définit comme le carré de son module :

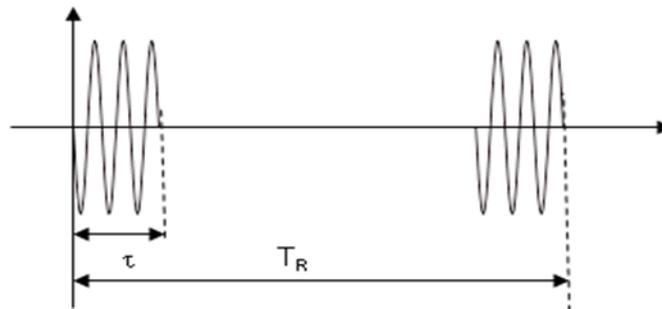
$$W = |Z(t)|^2 = X^2(t) + Y^2(t) = A^2(t)$$

Et son énergie :

$$E = \int |Z(t)|^2 . dt = \int [X^2(t) + Y^2(t)] . dt$$

g. Train d'impulsions sous porteuse

Soit un train d'impulsions, d'amplitude A_0 , de durée τ et de période de répétition T_R



L'énergie du signal s'écrit :

$$E = \frac{1}{2} \int_0^{\tau} A_0^2 . dt = \frac{A_0^2 \tau}{2}$$

Sa puissance crête est :

$$P_c = \frac{E}{\tau} = \frac{A_0^2}{2}$$

Sa puissance moyenne est :

$$P_m = \frac{E}{T_R} = \frac{P_c \cdot \tau}{T_R} = P_c \cdot \tau \cdot f_R$$

Si : $f_R = 1/T_R$ est la fréquence de répétition du signal. τ/T_R ou $\tau \cdot f_R$ est le facteur de forme du signal.

1.3 SPECTRE DES SIGNAUX REELS - NOTION DE FILTRAGE

a. Spectre d'un signal périodique

Tout signal périodique peut se décomposer en série de Fourier sous la forme :

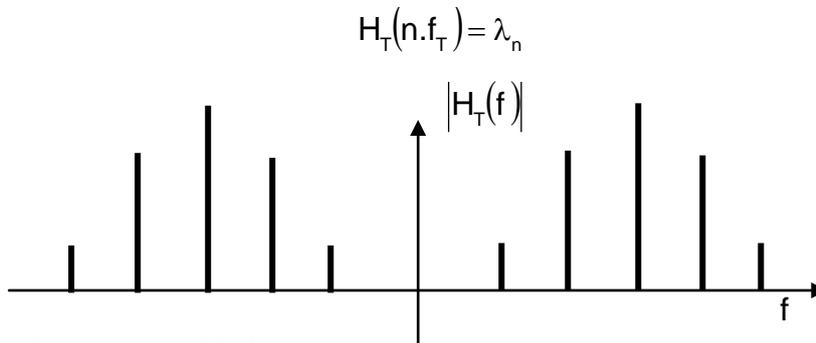
$$A(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda_n \exp\{j2\pi.nf_\tau.t\}$$

$$\lambda_n = \frac{1}{T} \int_{\Delta=T} A(t) \exp\{-j2\pi.nf_\tau.t\} dt$$

Avec :

- λ_n amplitude complexe de l'élément du spectre du signal porté par la fréquence $n.f_\tau$
- T période du signal ;
- $f_\tau = \frac{1}{T}$ espacement des raies du signal.

On retiendra donc que les signaux périodiques ont un spectre de raies que l'on définira de manière plus générale par :



Chacune des raies est caractérisée par :

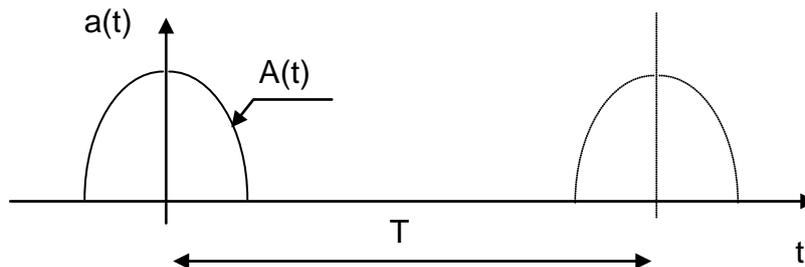
- son amplitude : $\rho_n = |H_\tau(n.f_\tau)|$
- sa phase : $\varphi_n = \text{Arg}(H_\tau(n.f_\tau))$

Et on vérifiera facilement à partir de l'expression de λ_n que :

$$H_\tau(-f) = H_\tau^*(f).$$

b. Spectre d'un signal non périodique

Soit un signal périodique $a(t)$, répétition tous les intervalles de temps T , d'un signal élémentaire $A(t)$. On peut ainsi considérer que $A(t)$ est la limite de $a(t)$ lorsque sa période T tend vers l'infini.



Le signal périodique $a(t)$ admet une décomposition en série de Fourier que l'on écrira :

$$a(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} H_T(n.f_T) \exp\{jn2\pi f_T.t\}$$

Soit en posant : $f = n.f_T$; $f_T = 1/T$

$$a(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} H_T(f) \exp\{j2\pi f.t\}$$

avec :

$$H_T(f) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} a(t) \exp\{-j2\pi f.t\} dt$$

Lorsque T tend vers l'infini $H_T(f)$ tend vers zéro, mais $T \cdot H_T(f)$ reste fini.

On écrira donc à la limite en posant :

$$df = f_T = 1/T ;$$

$$H(f) = T.H_T(f) ;$$

$$H_T(f) = H(f).df$$

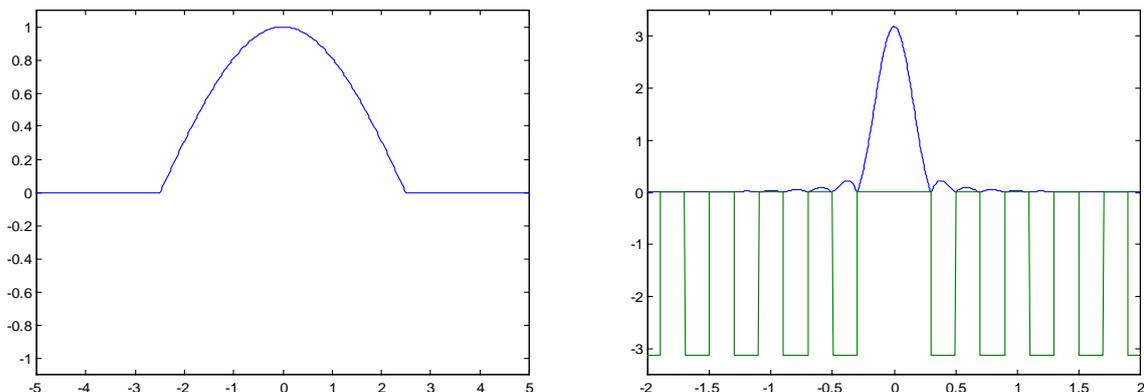
$$A(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) \exp\{j2\pi.ft\} df$$

$$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(t) \exp\{-j2\pi.ft\} dt$$

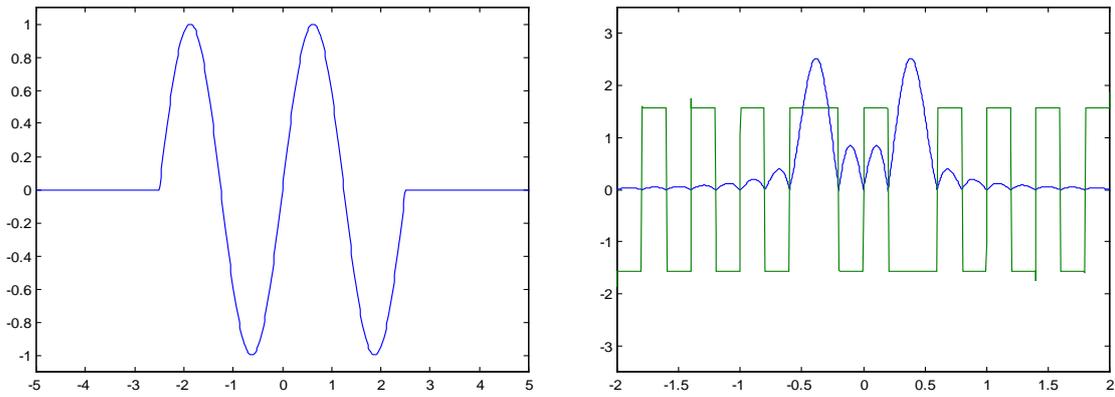
Ce sont les expressions des transformées et transformées inverses de Fourier des signaux non périodiques, le raisonnement précédent servant à relier physiquement les deux notions de spectre, ce qui permet d'établir les propriétés suivantes :

- $H(f) df = H_T(f)$ est une amplitude, donc $H(f)$ est une densité d'amplitude.
- $H(-f) = H^*(f)$, pour tout signal réel.
- Le spectre est caractérisé par son module $|H(f)|$ et sa phase $\text{Arg}(H(f))$.

Les figures ci après illustrent le spectre (amplitude et phase) de signaux réels.



Signal symétrique et son spectre (amplitude et phase)



Signal antisymétrique et son spectre (amplitude et phase)

Pour le premier signal (symétrique) la phase varie entre 0 et π , pour le second (antisymétrique) la phase varie entre $\pi/2$ et $-\pi/2$.

c. Spectre de signaux avec porteuse

Modulation d'amplitude

Soit un signal $A_1(t)$ résultant de la modulation d'amplitude par un signal $A(t)$ d'une porteuse de fréquence f_0 :

$$A_1(t) = A(t) \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0)$$

$$A_1(t) = \frac{1}{2} A(t) e^{j2\pi f_0 t} \cdot e^{j\varphi_0} + \frac{1}{2} A(t) e^{-j2\pi f_0 t} \cdot e^{-j\varphi_0}$$

Le spectre du signal $A(t)$ est défini par la relation :

$$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(t) \exp\{-j2\pi ft\} dt$$

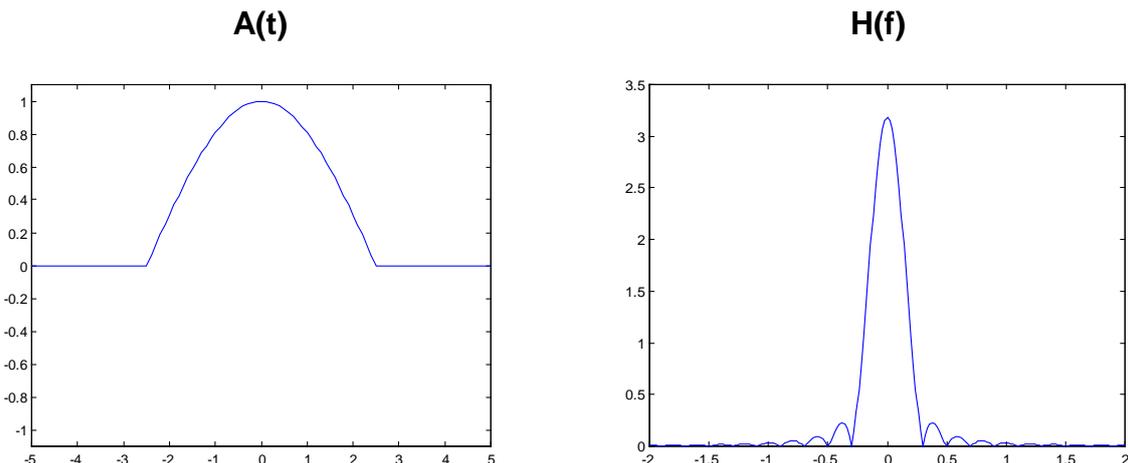
Le spectre de $A_1(t)$ s'écrira pour sa part :

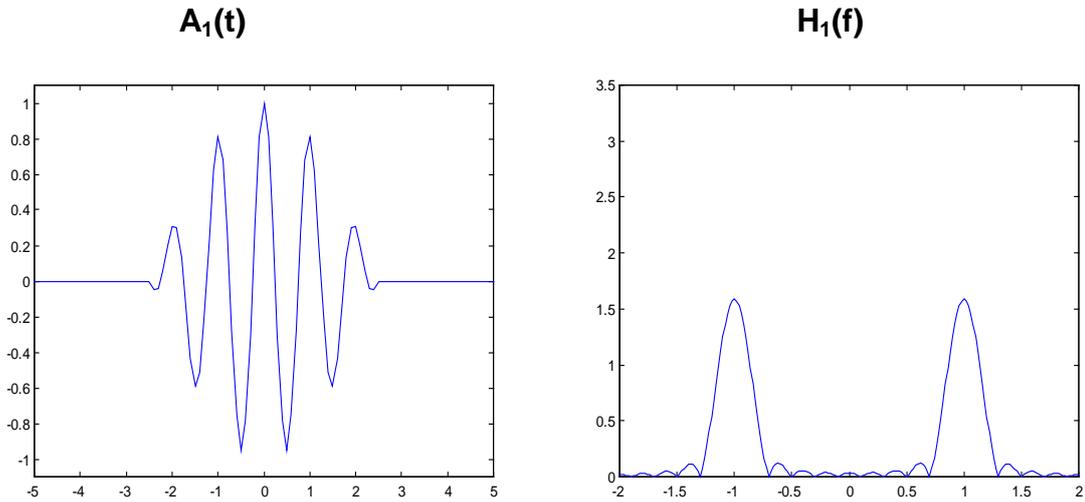
$$H_1(f) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} A(t) e^{\{-j2\pi(f-f_0)t\}} e^{j\varphi_0} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} A(t) e^{\{-j2\pi(f+f_0)t\}} e^{-j\varphi_0} dt$$

Expression que l'on peut mettre sous la forme :

$$H_1(f) = \frac{1}{2} [H(f - f_0) e^{j\varphi_0} + H(f + f_0) e^{-j\varphi_0}]$$

Les figures suivantes illustrent le spectre d'un signal en modulation d'amplitude :





Signal quelconque à bande étroite

Soit le signal d'expression générale :

$$A_1(t) = A(t) \cdot \cos(2\pi \cdot f_0 t + \varphi(t))$$

$$A_1(t) = X(t) \cdot \cos(2\pi \cdot f_0 t) + Y(t) \cdot \cos(2\pi \cdot f_0 t + \pi/2)$$

Avec

$$X(t) = A(t) \cdot \cos(\varphi(t))$$

$$Y(t) = A(t) \cdot \sin(\varphi(t))$$

Tous deux signaux vidéo réels de spectre $H_X(f)$ et $H_Y(f)$.

$A_1(t)$ est donc ici la somme de deux signaux à modulation d'amplitude dont le spectre à été établi au paragraphe précédent. On peut donc, en partant de l'expression précédente établir son spectre, en fonction des spectres $H_X(f)$ et $H_Y(f)$:

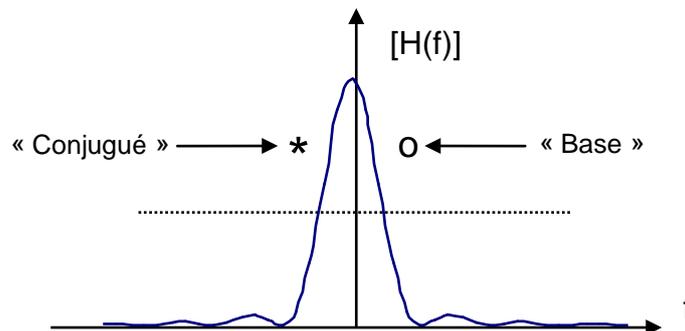
$$H_1(f) = \frac{1}{2} [H_X(f - f_0) + jH_Y(f - f_0) + H_X(f + f_0) - jH_Y(f + f_0)]$$

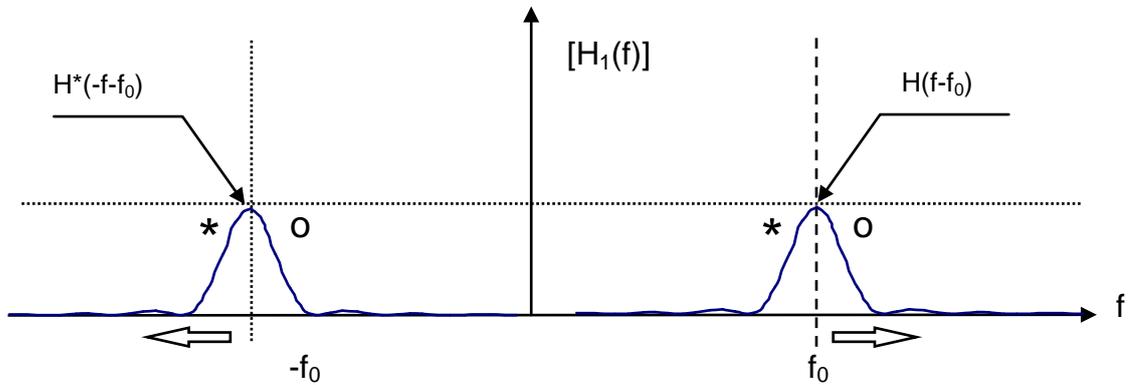
en posant $e^{j\pi/2} = j$.

D'où l'on déduit une **forme plus générale** en se souvenant que $H(-f) = H^*(f)$:

$$H_1(f) = \frac{1}{2} [H_X(f - f_0) + jH_Y(f - f_0) + H_X^*(-f - f_0) - jH_Y^*(-f - f_0)]$$

La figure suivante illustre cette expression des spectres de signaux à bande étroite :





d. Notion de filtrage (Signaux réels)

Un filtre vient modifier l'amplitude et la phase des signaux qui le traversent et ceci, dans un processus linéaire, d'une manière ne dépendant que de la fréquence du signal. On caractérise un filtre par sa transmittance que nous allons définir à partir des considérations physiques suivantes.

Soit un signal de la forme

$$e(t) = \cos(2\pi f.t)$$

Après passage dans un filtre linéaire, il sera atténué et déphasé et s'écrira :

$$s(t) = \alpha(f) \cos(2\pi f.t + \varphi(f))$$

$\alpha(f)$ et $\varphi(f)$ sont ici des fonctions de la seule fréquence « f », elles caractérisent entièrement le comportement du filtre en régime linéaire, c'est à dire dans des conditions telles que le comportement du filtre soit indépendant de l'amplitude du signal qui le traverse.

On peut écrire les signaux précédents sous forme complexe :

$$e(t) = \frac{1}{2} [\exp\{j2\pi f.t\} + \exp\{-j2\pi f.t\}] = E(f) + E(-f)$$

$E(f)$ et $E(-f)$ désignant les composantes du signal d'entrée porté par les fréquences f et -f.

$$s(t) = \frac{1}{2} [\alpha(f) \exp\{j(2\pi f.t + \varphi(f))\} + \alpha(f) \exp\{-j(2\pi f.t + \varphi(f))\}]$$

$$s(t) = \frac{1}{2} [\alpha(f) e^{j\varphi(f)} \cdot \exp\{j2\pi f.t\} + \alpha(f) e^{-j\varphi(f)} \cdot \exp\{-j2\pi f.t\}]$$

$$s(t) = \alpha(f) e^{j\varphi(f)} \cdot E(f) + \alpha(f) e^{-j\varphi(f)} \cdot E(-f)$$

On peut donc définir la transmittance d'un filtre par un nombre $F(f)$, égal à $\alpha(f) \cdot e^{j\varphi(f)}$ aux fréquences positives et tel que $F(-f) = F^*(f)$. Ce qui permettra d'établir la relation suivante reliant les spectres d'entrée et de sortie du signal :

$$H_s(f) = H_e(f) \cdot F(f)$$

Le filtrage étant une opération linéaire, l'action d'un filtre $F(f)$ sur la somme de plusieurs signaux élémentaires est la somme des actions individuelles de ce filtre sur chacun de ces signaux élémentaires. Ceci permet donc de généraliser cette définition à un signal quelconque.

En particulier, on peut écrire :

Pour un signal vidéo $A(t)$ de spectre $H_e(f)$ filtré par un filtre $F(f)$:

$$H_s(f) = H_e(f) \cdot F(f)$$

Pour ce même signal sous porteuse (modulation d'amplitude) :

$$A_1(t) = A(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$$

$$H_{1e}(f) = 1/2 \cdot [H_e(f-f_0) + H_e(f+f_0)]$$

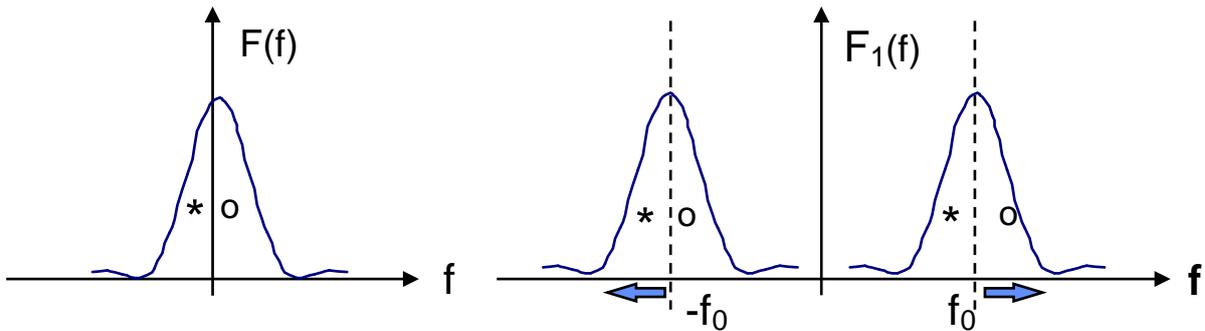
$$H_{1s}(f) = 1/2 \cdot [H_s(f-f_0) + H_s(f+f_0)] = H_{1e}(f) \cdot F_1(f)$$

$$H_{1s}(f) = 1/2 \cdot [H_e(f-f_0) \cdot F(f-f_0) + H_e(f+f_0) \cdot F(f+f_0)] = H_{1e}(f) \cdot F_1(f)$$

Expression générale du filtrage d'un signal réel sous porteuse, qui devient **lorsque les spectres sont disjoints** :

$$F_1(f) = [F(f-f_0) + F(f+f_0)]$$

La figure suivante illustre ces propriétés :



1.4 SIGNAL VIDEO COMPLEXE

a. Définition

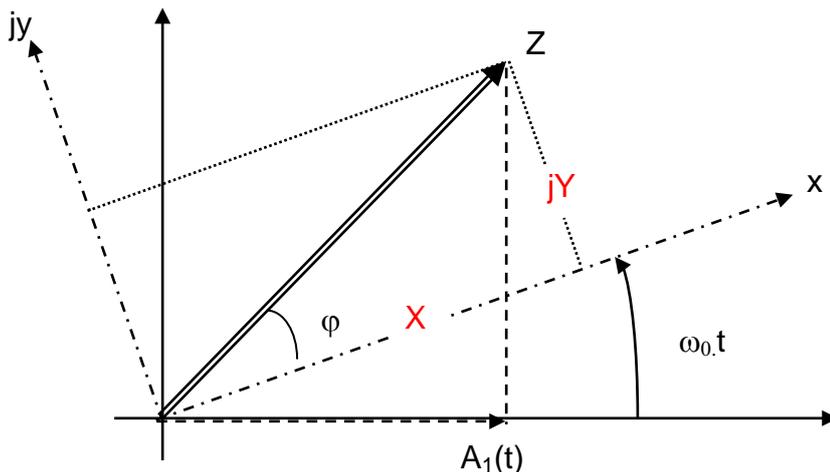
Cette notion a déjà été évoquée au paragraphe 1.1.1, pour un signal à bande étroite :

$$A_1(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t)) = X(t) \cos(\omega_0 t) + Y(t) \cos(\omega_0 t + \pi/2)$$

entièrement caractérisé par :

- sa fréquence porteuse $f_0 = \omega_0/2\pi$,
- sa "modulation" contenue dans $A(t)$ et $\varphi(t)$,
- sa phase à l'origine φ_0 généralement inconnue que l'on peut inclure dans $\varphi(t)$,
- sa fréquence doppler f_d ; la phase $\varphi_d(t) = 2\pi f_d t$, peut être incluse dans $\varphi(t)$.

En se plaçant dans le plan de Fresnel,



On constate que $A_1(t)$ est la projection sur l'axe des réels de la fonction complexe :

$$z(t) = [X(t) + j.Y(t)] \exp\{j\omega_0 t\} = Z(t) \exp\{j\omega_0 t\}$$

$Z(t)$ est le signal vidéo complexe associé au signal réel $A_1(t)$, ω_0 étant connu à priori. Il contient bien toute l'information utile portée par $A_1(t)$; on l'exprime de la manière suivante :

$$Z(t) = X(t) + jY(t)$$

avec

$$X(t) = A(t) \cdot \cos(\varphi(t))$$

$$Y(t) = A(t) \cdot \sin(\varphi(t))$$

La connaissance de $Z(t)$ permet à elle seule de caractériser toute l'information contenue dans le signal. Elle **est nécessaire** quand :

- la phase à l'origine de ce signal est inconnue, ce qui est toujours le cas en radar,
- le signal est assorti d'une fréquence doppler inconnue à priori,

C'est à dire **dans tous les cas pratiques**.

b. Spectre d'un signal vidéo complexe

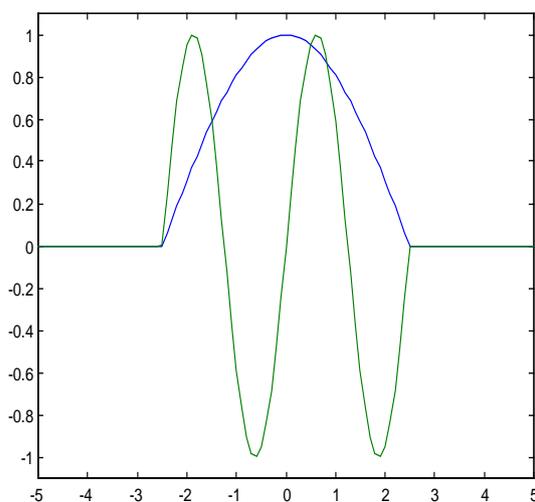
Le signal complexe est la somme des deux signaux :

$$Z(t) = X(t) + jY(t)$$

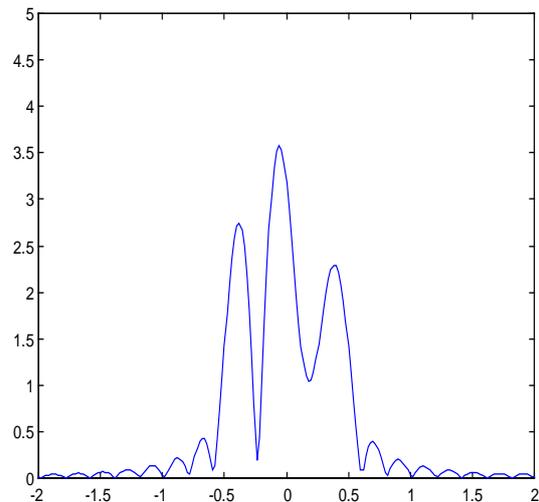
expression où X et Y sont réels. la transformée de Fourier de $Z(t)$ s'écrira donc du fait de sa linéarité :

$$H_Z(f) = H_X(f) + j.H_Y(f)$$

Composantes X et Y d'un signal complexe



Module du spectre de ce signal



Exemple de spectre de signal vidéo complexe

Les propriétés de $H_Z(f)$ se déduiront donc de celles de $H_X(f)$ et $H_Y(f)$ toutes deux transformées de Fourier de variables réelles. en particulier :

DONNEES THEORIQUES DE BASE

$$\begin{aligned}H_{Z^*}(f) &= H_X(f) - jH_Y(f) \\H_{Z^*}(-f) &= H_X(-f) - jH_Y(-f) \\H_{Z^*}(-f) &= H_X^*(f) - jH_Y^*(f) \\H_{Z^*}(-f) &= H_Z^*(f)\end{aligned}$$

Relation différente de celle établie pour des variables réelles :

$$H(-f) = H^*(f)$$

mais la contenant.

c. Relation avec le spectre du signal réel sous porteuse

Nous avons établi au paragraphe 1.3.3 l'expression du spectre d'un signal sous porteuse :

$$H_1(f) = \frac{1}{2} \left[H_X(f - f_0) + jH_Y(f - f_0) + H_X^*(-f - f_0) - jH_Y^*(-f - f_0) \right]$$

En notant que :

$$Z(t) = X(t) + jY(t)$$

$$Z^*(t) = X(t) - jY(t)$$

$$\begin{aligned}H_Z(f) &= H_X(f) + jH_Y(f) \\H_{Z^*}(f) &= H_X(f) - jH_Y(f) \\H_{Z^*}(f) &= H_X^*(-f) - jH_Y^*(-f)\end{aligned}$$

On en déduira que :

$$H_1(f) = \frac{1}{2} \left[H_Z(f - f_0) + H_{Z^*}(-f - f_0) \right]$$

d. Caractéristiques du signal vidéo complexe

Position

En radar, tout signal reçu est, par rapport au signal émis, caractérisé par un décalage temporel « τ » et par un décalage fréquentiel « F » dû à la fréquence doppler f_d de la cible. On peut donc pour le caractériser situer ce signal dans un plan contenant le vecteur $\theta = (\tau, F)$.

On peut écrire un signal vidéo complexe et son spectre sous la forme :

$$Z(t) = \gamma \cdot a(t) \Leftrightarrow \int |a(t)|^2 dt = 1$$

$$H(f) = \gamma \cdot h(f) \Leftrightarrow \int |h(f)|^2 df = 1$$

En effet l'énergie du signal vidéo a pour expression (Cf chapitre 8)

$$E_V = \int |Z(t)|^2 dt = \int |H(f)|^2 df$$

On vérifie donc bien dans les deux cas que : $\gamma^2 = 1/E_V$. La position du « centre énergétique du signal » aura alors pour expression :

$$\bar{\tau} = \frac{\int t |Z(t)|^2 dt}{\int |Z(t)|^2 dt}$$

En distance :

$$\bar{\tau} = \int t |a(t)|^2 dt$$

$$\bar{F} = \frac{\int f |H(f)|^2 df}{\int |H(f)|^2 df}$$

En fréquence :

$$\bar{F} = \int f |h(f)|^2 df$$

Dispersion

La dispersion d'un signal autour de sa position dépend de la répartition de son énergie autour de sa position moyenne. Elle se caractérise par la variance :

$$\sigma_{\tau}^2 = \int t^2 |a(t)|^2 dt$$

De même, la dispersion en fréquence d'un signal autour de sa position moyenne sera caractérisée par :

$$\sigma_F^2 = \int f^2 |h(f)|^2 df$$

On démontre la propriété suivante :

$$\sigma_{\tau}^2 \cdot \sigma_F^2 \geq \frac{1}{4\pi}$$

Durée et bande passante équivalentes

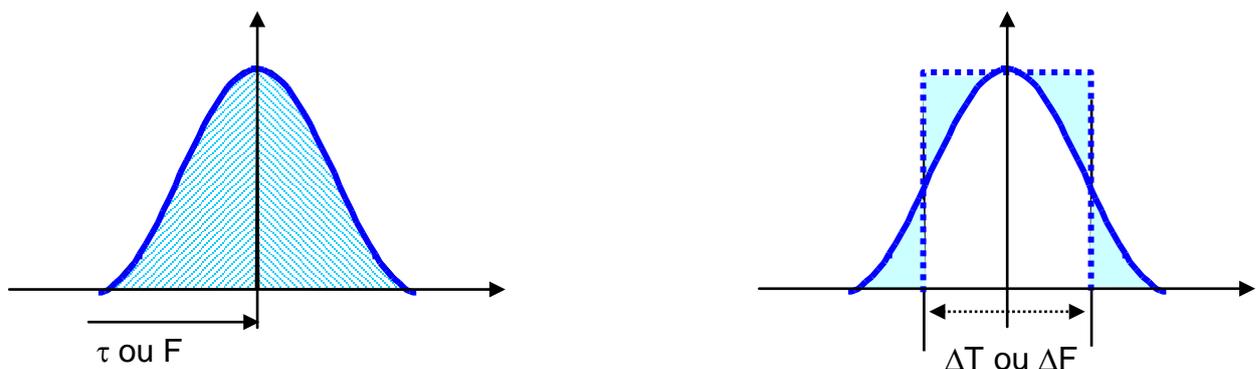
La durée équivalente d'un signal est par définition, la durée d'un signal de puissance constante, égale à sa puissance maximale, et portant la même énergie. Soit :

$$\Delta T = \int |Z(t)|^2 dt / |Z_{\max}|^2$$

La bande passante équivalente d'un signal est par définition, la bande d'un signal de spectre rectangulaire portant la même énergie. Soit :

$$\Delta F = \int |H(f)|^2 df / |H_{\max}|^2$$

La figure suivante illustre les notions de position et de largeur équivalente.



Les deux notions de dispersion et de largeur équivalente sont complémentaires. Nous allons les relier entre elles sur un exemple typique.

Application à un signal gaussien non modulé en fréquence

Un signal gaussien non modulé en fréquence et son spectre peuvent s'écrire sous la forme :

$$A(t) = \exp\{-\pi(t/T_0)^2\},$$

$$H(f) = \exp\{-\pi(f/F_0)^2\}$$

Avec :

$$T_0 \cdot F_0 = 1$$

A(t) et H(f) sont d'amplitude maximale unitaire. **L'énergie** d'un tel signal s'écrit, avec :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \exp\{u^2/2\} dt = 1$$

$$E_v = \int |A(t)|^2 dt = \int \exp\left\{-\frac{2\pi t^2}{T_0^2}\right\} dt = \sqrt{\frac{T_0^2}{4\pi}} \int \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} du = \sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{T_0^2}{4\pi}}$$

$$E_v = \frac{T_0}{\sqrt{2}}$$

La **durée équivalente** de ce signal s'écrira :

$$\Delta T = \frac{E_v}{|A_{MAX}|^2} = E_v$$

$$\Delta T = \frac{T_0}{\sqrt{2}}$$

La dispersion de ce signal s'écrira également :

$$\sigma_\tau^2 = \int t^2 |a(t)|^2 dt = \frac{1}{E_v} \int t^2 |A(t)|^2 dt$$

$$\sigma_\tau^2 = \frac{\sqrt{2}}{T_0} \int \exp\left\{-\frac{2\pi t^2}{T_0^2}\right\} t^2 dt = \frac{T_0^2}{4\pi}$$

$$\sigma_\tau = \frac{T_0}{\sqrt{4\pi}} = \frac{\Delta T}{\sqrt{2\pi}}$$

On rappelle en effet que : $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int t^2 \exp\{t^2/2\sigma^2\} dt = \sigma^2$ et on peut vérifier dans ce cas que :

$$\sigma = T_0 / \sqrt{4\pi}.$$

Les résultats en fréquence sont symétriques, ce qui permet de retenir :

$\Delta T = \frac{T_0}{\sqrt{2}}$	$\Delta F = \frac{F_0}{\sqrt{2}}$
$\sigma_\tau = \frac{T_0}{\sqrt{4\pi}} = \frac{\Delta T}{\sqrt{2\pi}}$	$\sigma_F = \frac{F_0}{\sqrt{4\pi}} = \frac{\Delta F}{\sqrt{2\pi}}$
$\sigma_\tau \cdot \sigma_F = \frac{1}{4\pi}$	

1.5 RETARD ET INVERSION DU TEMPS

Soit un signal $Z(t)$, sa transformée de Fourier est :

$$H_Z(f) = \int Z(t) \exp\{j2\pi f.t\} dt$$

Considérons le signal $R(t) = Z(t-\tau)$, sa transformée de Fourier s'écrit :

$$H_R(f) = \int Z(t-\tau) \exp\{j2\pi f.t\} dt = \exp\{-j2\pi f.\tau\} \int Z(u) \exp\{j2\pi f.u\} du = \exp\{-j2\pi f.\tau\} H_Z(f)$$

Résultat obtenu en opérant le changement de variable $u = t - \tau$.

Par la même méthode on trouve les propriétés remarquables, suivantes valables pour tous signaux complexes, et résumées dans le tableau ci après.

Signal	Spectre	Changement de variable
$Z(t)$	$H_Z(f)$	
$Z(t-\tau)$	$\exp\{-j2\pi f.\tau\}.H_Z(f)$	$t = u + \tau$
$Z(-t)$	$H_Z(-f)$	$t = -u$
$Z(\tau-t)$	$\exp\{-j2\pi f.\tau\}.H_Z(-f)$	$t = \tau - u$
$Z(t-\tau).\exp\{j2\pi F.t\}$	$\exp\{-j2\pi(f - F).\tau\}.H_Z(f - F)$	$t = \tau + u$

2 SIGNAUX ALEATOIRES, DEFINITIONS ET PROPRIETES

2.1 NOTION DE VARIABLE ALEATOIRE

On désigne sous le nom de variable aléatoire, toute variable qui peut prendre un certain nombre de valeurs (discrètes ou non), chacune d'elle n'étant pas prévisible mais pouvant survenir à chaque instant, ou à chaque épreuve, avec une certaine probabilité.

Nous désignerons par :

- X : la variable aléatoire,
- x : une des valeurs possibles de X
- $P(x)$: la probabilité pour que X prenne la valeur x

$$P(x) \text{ ou } p(x) = P\{X=x\}$$

a. VA discontinue

X peut prendre un certain nombre de valeurs discrètes x_i avec pour chacune d'entre elles une probabilité $P(x_i)$. On notera, pour l'ensemble des x_i :

$$\sum_i P(x_i) = 1$$

Exemple le jeu de dés :

$$x_i = \{1;2;3;4;5;6\}$$

$$P(x_i) = \frac{1}{6}$$

b. VA continue

X peut prendre une infinité de valeurs en évoluant continûment dans un domaine donné. Dans

ce cas on définit une valeur de comparaison x et un domaine d'observation dx associé à x et on écrit :

$$P\{x \leq X < x + dx\} = P(x) = f(x)dx$$

qui est la probabilité pour que X se trouve dans l'intervalle dx autour de x .

$f(x)$ est la densité de probabilité de la variable X . On notera dans le domaine d'existence de X :

$$\int f(x).dx = 1$$

c. Moyennes et moments

La moyenne, ou espérance mathématique d'une VA, représente la valeur que l'on observerait en prenant la moyenne des résultats sur un nombre infini d'épreuves sur cette variable, soit, selon que la VA soit discontinue ou continue :

$$E(X) = \sum_i x_i \cdot P(x_i)$$

$$E(X) = \int x \cdot f(x) dx$$

On définit de la même manière un moment d'ordre n par :

$$E(X^n) = \sum_i x_i^n \cdot P(x_i)$$

$$E(X^n) = \int x^n \cdot f(x) dx$$

$E(X^2)$ est la moyenne quadratique de X

La variance de X s'écrit : $\sigma_X^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$, c'est la moyenne quadratique de : $X - E(X)$.

d. Propriétés

La moyenne d'une somme est égale à la somme des moyennes.

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

La moyenne du produit de deux VA indépendantes est égale au produit de leurs moyennes

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$$

La moyenne quadratique d'une somme est en général :

$$E[(X+Y)^2] = E(X^2) + E(Y^2) + 2E(X \cdot Y)$$

Si deux VA sont **indépendantes et de valeur moyenne nulle** :

$$E[(X+Y)^2] = E(X^2) + E(Y^2)$$

En particulier, si **deux VA sont indépendantes**, la variance de leur somme est égale à la somme de leurs variances.

$$\sigma^2(X+Y) = \sigma^2(X) + \sigma^2(Y)$$

2.2 NOTION DE FONCTION ALEATOIRE

On désignera sous le nom de fonction aléatoire $X(t)$, une entité répondant simultanément aux deux propriétés :

- $X(t)$ est une fonction du temps
- La variation de $X(t)$ au cours du temps est imprévisible.

Par exemple : un jeu de dés rythmé par une horloge, la tension de bruit à la sortie d'un récepteur.

a. Stationnarité

Une fonction aléatoire est stationnaire, si on peut à tout instant lui associer une variable aléatoire X unique, définissant son comportement statistique.

Les moyennes et moments de la fonction aléatoire sont alors ceux de la VA associée.

b. Ergodicité

Une fonction aléatoire est ergodique, ou répond au principe d'ergodicité, si ses moyennes et moments temporels sont égaux à ses moyennes et moments statistiques, soit :

$$m_n(X) = \frac{\text{Lim}}{T \Rightarrow \infty} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T X^n(t) dt = \int x^n \cdot f(x) dx = E(X^n)$$

Dans ce qui suit, nous traiterons de FA stationnaires, ergodiques et de valeur moyenne nulle.

2.3 DENSITE SPECTRALE DES SIGNAUX ALEATOIRES

2.3.1 Théorème de corrélation – Théorème de PARSEVAL

Soient deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$ et l'intégrale, supposée convergente :

$$h(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g^*(t - \tau) dt$$

La transformée inverse de Fourier de $h(\tau)$ a pour expression :

$$H_h(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f \cdot \tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f \cdot \tau} \cdot f(t)g^*(t - \tau) dt \cdot d\tau$$

Pour ramener cette intégrale double au produit de deux intégrales simples, il suffit de faire le changement de variables suivant :

$$t = u; (t - \tau) = v \Leftrightarrow \tau = u - v$$

Le jacobien de cette transformation est alors :

$$\left| \frac{D(t, \tau)}{D(u, v)} \right| = \left\| \begin{array}{cc} \frac{\delta t}{\delta u} & \frac{\delta t}{\delta v} \\ \frac{\delta \tau}{\delta u} & \frac{\delta \tau}{\delta v} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{array} \right\| = 1$$

On écrira donc :

$$\iint_D F(t, \tau) dt \cdot d\tau = \iint_D \Phi(u, v) \left| \frac{D(t, \tau)}{D(u, v)} \right| du \cdot dv$$

$$H_h(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f \cdot \tau} \cdot f(t)g^*(t - \tau) dt \cdot d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-j2\pi f u} du \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} g^*(v) e^{-j2\pi(-f)v} dv$$

On a fait apparaître les transformées de Fourier de $f(u)$ et de $g^*(v)$:

$$H_f(f) \text{ et } H_{g^*}(-f) = H_g^*(f)$$

Ce qui permet d'écrire

$$H_h(f) = H_f(f)H_g^*(f)$$

Dont on peut prendre la transformée de Fourier directe pour aboutir à :

$$h(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g^*(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} H_f(f)H_g^*(f)e^{j2\pi f\tau}df$$

Cette dernière expression constitue le **Théorème de corrélation**, qui peut prendre différentes formes :

Théorème de Parseval ($\tau = 0$) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} H_f(f)H_g^*(f)df$$

Relation de Parseval ($f = g = X$ et $\tau = 0$) :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |X(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |H_X(f)|^2 df$$

qui est l'expression déjà rencontrée de l'énergie du signal $X(t)$.

2.3.2 Cas des signaux aléatoires

Soit $X(t)$ un signal aléatoire. Tout échantillon de durée T du signal $X(t)$ possède une transformée de Fourier :

$$H_X(f,T) = \int_{\Delta=T} X(t)e^{-j2\pi f.t} dt$$

La valeur de cette transformée de Fourier dépend de l'échantillon choisi ; elle n'est donc pas caractéristique du signal lui même. Par contre, ce signal étant stationnaire et de valeur moyenne nulle sa puissance est exprimée par :

$$W = \lim_{T \Rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |X(t)|^2 dt$$

Soit en appliquant la relation de Parseval :

$$W = \lim_{T \Rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |H_X(f,T)|^2 df$$

Pour tout signal physique W est fini. Il est donc concevable que $\lim_{T \Rightarrow \infty} \frac{|H_X(f,T)|^2}{T}$ existe.

Nous la définirons comme la **densité spectrale du signal** :

$$\Phi_X(f) = \lim_{T \Rightarrow \infty} \frac{|H_X(f,T)|^2}{T}$$

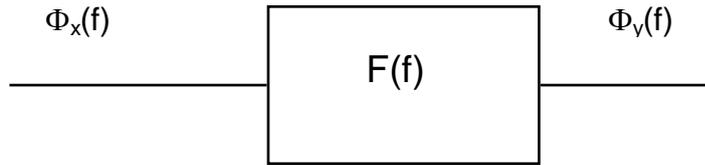
On notera que :

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_X(f)df$$

W s'exprime en watts ; $\Phi(f)$ s'exprime en watts/hertz, c'est une fonction réelle ; $\Phi(-f) = \Phi(f)$.

2.4 FILTRAGE LINEAIRE D'UN SIGNAL ALEATOIRE

Soit un filtre linéaire de transmittance $F(f)$, $X(t)$ une fonction aléatoire et $Y(t)$ la fonction aléatoire correspondante à la sortie du filtre.



A tout échantillon de durée T de $X(t)$, de spectre $H_x(f, T)$, correspond un échantillon $Y(t)$, de spectre $H_y(f, T)$. Ce qui permet d'écrire :

$$H_y(f, T) = H_x(f, T)F(f)$$

$$\lim_{T \Rightarrow \infty} \frac{1}{T} |H_y(f, T)|^2 = \lim_{T \Rightarrow \infty} \frac{1}{T} |H_x(f, T)|^2 |F(f)|^2$$

donc

$$\boxed{\Phi_y(f) = \Phi_x(f) |F(f)|^2}$$

2.5 FONCTION D'AUTOCORRELATION

2.5.1 Signaux d'expression connue, ou « déterministes »

Soit un signal $S(t)$ de durée T_s , on définit sa fonction d'autocorrélation par :

$$\rho_{SS}(\tau) = \frac{1}{T_s} \int_{\Delta=T_s} S(t) S^*(t-\tau) dt$$

L'application du théorème de corrélation permet d'écrire :

$$\rho_{SS}(\tau) = \frac{1}{T_s} \int_{\Delta=T_s} S(t) S^*(t-\tau) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|H_S(f)|^2}{T_s} e^{j2\pi f \tau} df$$

$$\rho_{SS}(0) = \frac{1}{T_s} \int_{\Delta=T_s} |S(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|H_S(f)|^2}{T_s} df = W$$

$\frac{|H_S(f)|^2}{T_s}$ est la densité spectrale $\Phi_S(f)$ du signal $S(t)$. ce qui permet d'écrire :

$$\Phi_S(f) = \frac{|H_S(f)|^2}{T_s}$$

$$\rho_{SS}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_S(f) e^{j2\pi f \tau} df$$

$\Phi_S(f)$ est donc la transformée de Fourier de $\rho_{SS}(\tau)$.

2.5.2 Cas des signaux aléatoires

Soit $X(t)$ un signal aléatoire et $H_X(f, T)$ le spectre d'un échantillon de durée T de ce signal.

La fonction d'autocorrélation d'un tel signal s'écrit :

$$\rho_{XX}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t) X^*(t - \tau) dt$$

$$\rho_{XX}(\tau) = \int \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|H_X(f)|^2}{T} \cdot e^{j2\pi \cdot f \tau} \cdot df$$

donc

$$\rho_{XX}(\tau) = \int \Phi_X(f) e^{j2\pi \cdot f \tau} \cdot df$$

$\Phi_X(f)$ est la transformée de Fourier de $\rho_{XX}(\tau)$.

Récapitulation

Pour tout signal :

$\rho_{XX}(\tau) = \int \Phi_X(f) e^{j2\pi \cdot f \tau} \cdot df$
$\Phi_X(f) = \int \rho_{XX}(\tau) e^{-j2\pi \cdot f \tau} \cdot df$
$\rho_{XX}(0) = \int \Phi_X(f) \cdot df = w$

2.5.3 Propriétés de la fonction d'autocorrélation

- $\Phi_X(f)$ est une fonction réelle symétrique, donc : $\rho_{XX}(\tau)$ est une variable réelle et $\rho_{XX}(-\tau) = \rho_{XX}(\tau)$.
- $\rho_{XX}(0)$, énergie du signal, est la valeur maximale de $\rho_{XX}(\tau)$.

Par ailleurs, si X et Y sont deux signaux aléatoires indépendants et de valeur moyenne nulle on peut vérifier que ;

$$\rho_{(X+Y)(X+Y)}(\tau) = \rho_{XX}(\tau) + \rho_{YY}(\tau)$$

Ce qui entraîne :

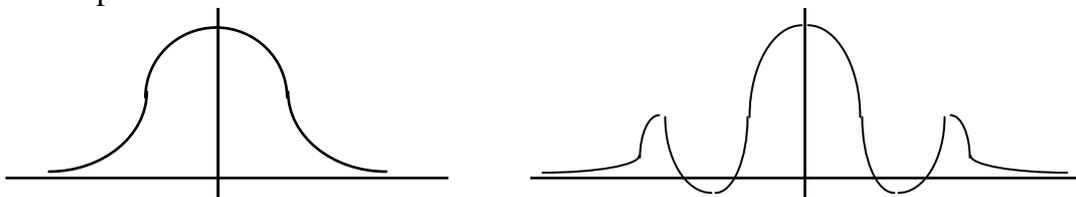
$$\Phi_{X+Y}(f) = \Phi_X(f) + \Phi_Y(f)$$

Cette dernière propriété précise et généralise le fait que deux signaux aléatoires s'ajoutent en puissance.

2.5.4 Allures caractéristiques

a. Signaux vidéo

les propriétés de la fonction d'autocorrélation établies aux paragraphes précédents permettent de présenter à priori les allures suivantes.



Lorsque $\rho(\tau)$ est faible ou nul cela sous entend une certaine « indépendance » entre $X(t)$ et $X(t-\tau)$. On dit alors que les échantillons du signal $X(t)$ distants de τ sont décorrélés.

b. Signaux sous porteuse

Soit le signal réel : $Y(t) = X(t)\cos(\omega.t)$

Sa fonction d'autocorrélation a pour expression :

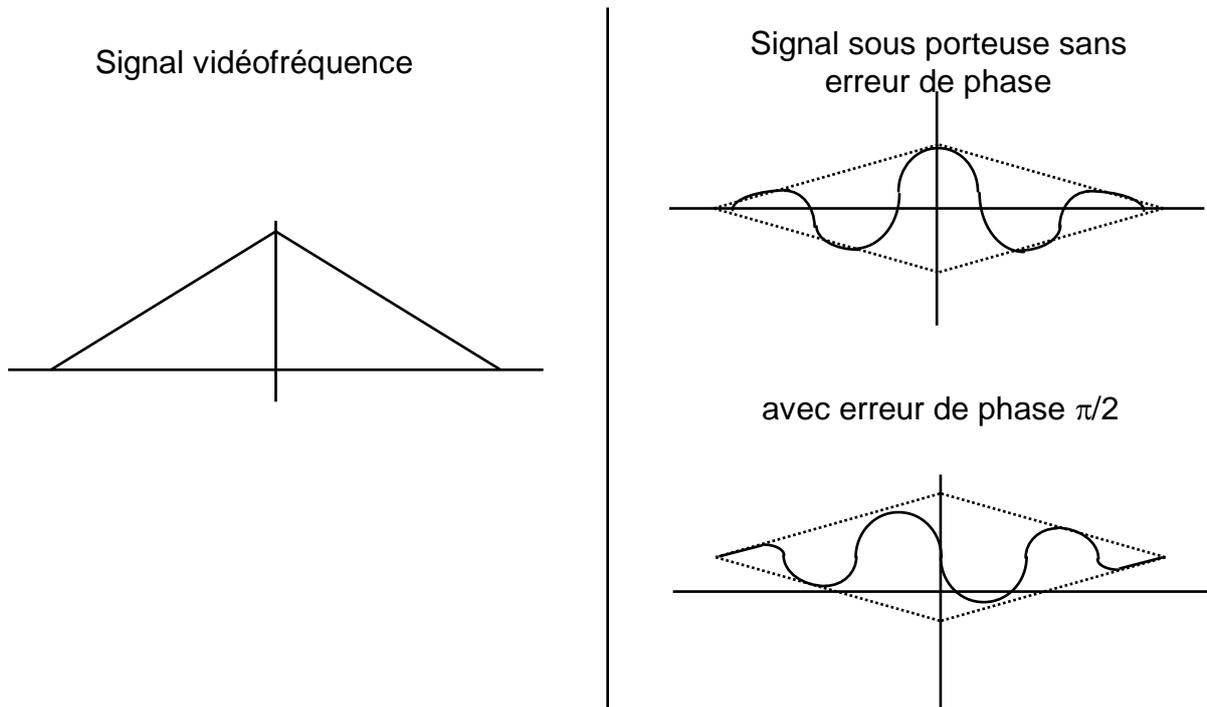
$$\rho_{YY}(\tau) = \frac{\text{Lim}}{T \Rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t) \cdot \cos(\omega t) X(t - \tau) \cos(\omega(t - \tau)) dt$$

$$\rho_{YY}(\tau) = \frac{\text{Lim}}{T \Rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_0^T X(t) \cdot X(t - \tau) \cos(\omega\tau) dt$$

Plus un terme de valeur moyenne nulle. Il en résulte que :

$$\rho_{yy}(\tau) = \frac{1}{2} \cdot \rho_{xx}(\tau) \cos(\omega.\tau)$$

d'où les allures caractéristiques suivantes :



Cette particularité est à prendre en compte quand on désire procéder à des corrélations sous porteuse, la non connaissance de la phase du signal traité ayant un effet perturbateur.

2.5.5 Dérivation de $\rho(\tau)$ par rapport à τ

$$\rho(\tau) = \overline{X(t) \cdot X(t - \tau)}$$

$$\rho'_{xx}(\tau) = -\overline{X(t) \cdot X'(t - \tau)} = -\overline{X(u + \tau) \cdot X'(u)}$$

$$\rho''_{xx}(\tau) = -\overline{X'(u + \tau) \cdot X'(u)} = -\overline{X'(t) \cdot X'(t - \tau)}$$

En posant : $u = t - \tau$, et inversement : $t = u + \tau$. Donc :

$$\rho''_{xx}(\tau) = -\rho_{x'.x'}(\tau)$$

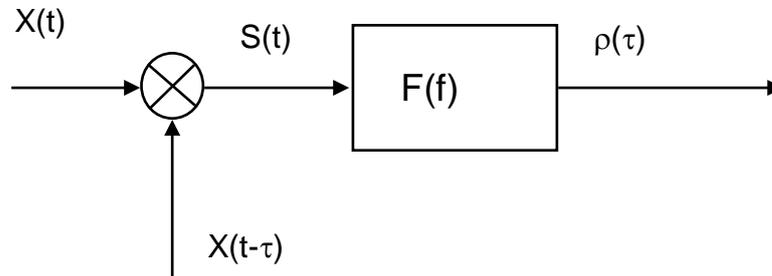
La dérivée seconde de la fonction d'autocorrélation de $X(t)$, est, au signe près, la fonction d'autocorrélation de la dérivée première de $X(t)$.

2.6 PROCÉDES PRATIQUES DE CORRELATION

2.6.1 Intégration en vidéofréquence

Dans la pratique, on ne traite pas de signaux de durée infinie mais des échantillons de durée finie d'un signal. En analogique (signaux réels) cette opération s'effectue en deux temps :

- **Produit** du signal $X(t)$ par la référence $X(t-\tau)$
- Intégration à l'aide d'un **filtre intégrateur**.



Dans ce cas, le signal de sortie est un signal vidéofréquence. Pour un signal $X(t)$ de code connu à priori, il est égal à sa valeur théorique $\rho(\tau)$. Pour un signal $X(t)$ aléatoire, il prend cette valeur seulement en moyenne.

Le **filtre intégrateur idéal** est celui qui réaliserait l'opération :

$$\rho(\tau) = \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{+T/2} S(t) dt$$

$$\rho(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(t) \left(\frac{u(-T/2) - u(+T/2)}{T} \right) dt$$

Soit en appliquant le théorème de convolution et en notant que « u » est un échelon unitaire de durée T et d'amplitude $1/T$ dont la transformée de Fourier est :

$$\frac{\text{Sin}(\pi.f.T)}{\pi.f.T}$$

$$\rho(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} H_S(f) \frac{\text{Sin}(\pi.f.T)}{\pi.f.T} df$$

Le filtre réalisant l'opération d'intégration linéaire :

$$\frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{+T/2} S(t) dt$$

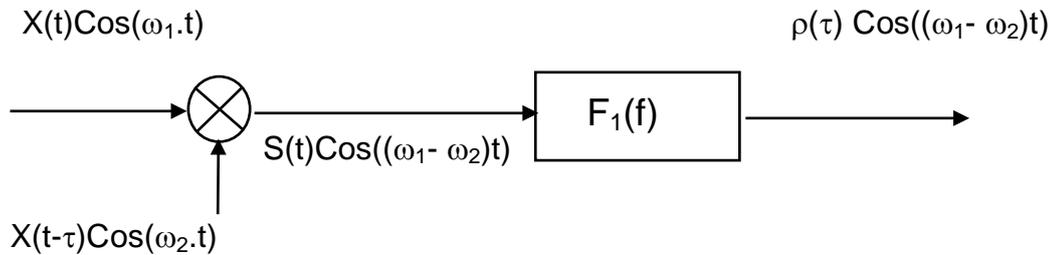
a pour transmittance :

$$F(f) = \frac{\text{Sin}(\pi.f.T)}{\pi.f.T}$$

2.6.2 Intégration sous porteuse

On peut réaliser une opération de corrélation en moyenne fréquence en introduisant des porteuses différentes sur le signal traité et la référence, pour s'affranchir de la non connaissance de la phase du signal traité.

Le filtre intégrateur est alors un filtre passe bande, équivalent au filtre passe bas précédent et centré sur la fréquence de battement différence entre signal et référence.



L'opération de filtrage sous porteuse est équivalente à l'opération de filtrage vidéo. Le signal de sortie est de même nature à ceci près qu'il est porté par un signal de pulsation :

$$\omega_0 = \omega_1 - \omega_2$$

Le raisonnement suivant permet de confirmer cette propriété. Considérons l'opérateur :

$$2 \cos(\omega.t) \left(\frac{u(-T/2) - u(+T/2)}{T} \right) = O(t)$$

On vérifie facilement que :

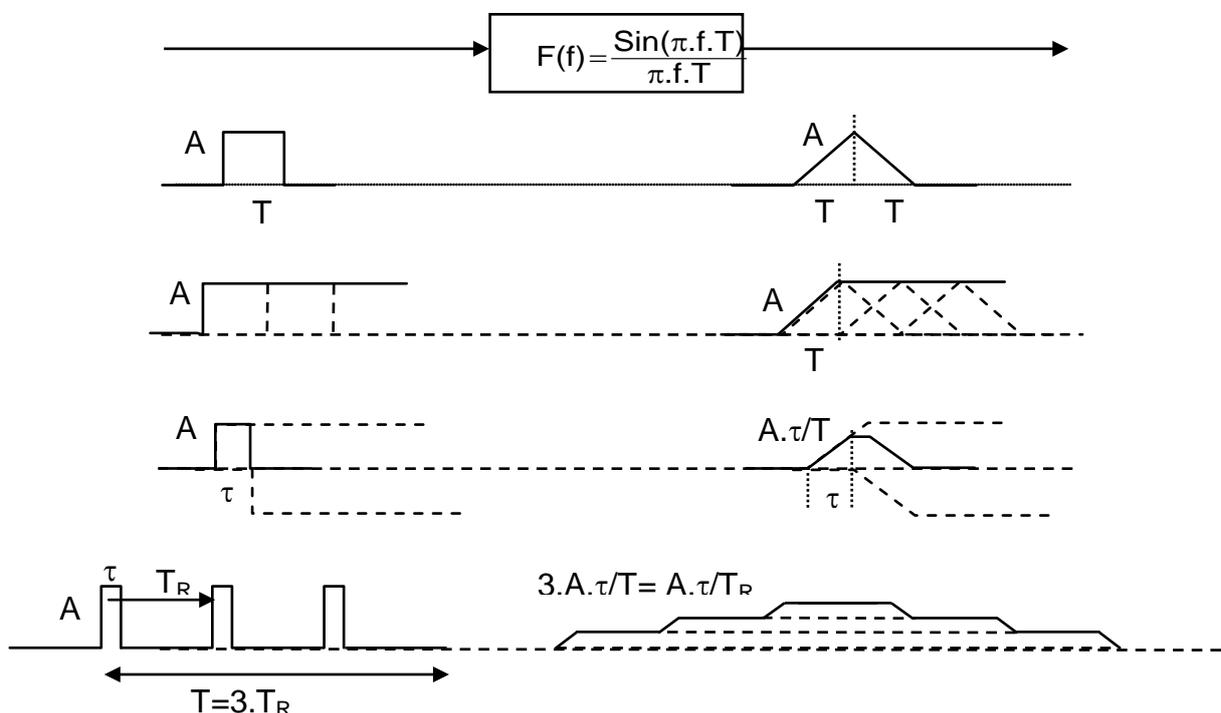
$$\int O(t)S(t)\cos(\omega.t)dt = \int_{-T/2}^{T/2} \frac{2}{T} \cos^2(\omega.t)S(t)dt = \int_{-T/2}^{T/2} \frac{1}{T} S(t)dt = \rho(\tau)$$

L'opération de corrélation de $S(t)\cos(\omega t)$ par $O(t)$ permet bien de recueillir la fonction de corrélation du signal $S(t)$. La transformée de Fourier de $O(t)$ est donc la transmittance du filtre intégrateur sous porteuse qui a pour expression :

$$F_1(f) = \frac{\sin(\pi(f - f_0)T)}{\pi(f - f_0)T} + \frac{\sin(\pi(f + f_0)T)}{\pi(f + f_0)T}$$

2.6.3 Comportement pratique des filtres intégrateurs

Les figures suivantes illustrent l'action d'un filtre intégrateur linéaire sur différents signaux vidéos typiques :



En effet, le filtre intégrateur idéal réalise l'opération linéaire :

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} S(t) \cdot dt$$

Sont présentés ci avant le comportement d'un tel filtre sur :

- signal de durée τ égale au temps d'intégration du filtre T ,
- échelon unitaire,
- signal de durée τ inférieure au temps d'intégration du filtre T ,
- train d'impulsions intégrés sur trois périodes de répétition du radar.

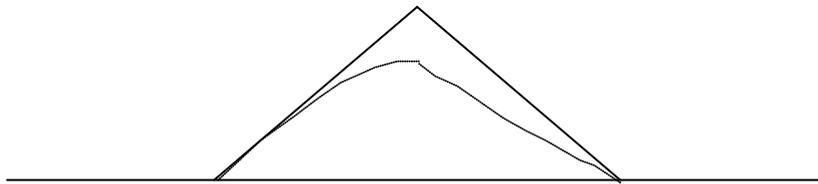
On constate que l'amplitude du signal de sortie est égale à la valeur moyenne des amplitudes du signal d'entrée pendant la durée d'intégration du filtre.

2.6.4 Généralisation aux filtres réels

Les propriétés précédentes sont conservées par les filtres réels à quelques défauts près :

- non linéarités sur la croissance et la décroissance du signal,;
- perte sur l'amplitude maximale du signal, liée par ailleurs au rendement du filtrage.

comme l'illustre la figure ci après :



Nous retiendrons qu'en première approximation, **un filtre quelconque de bande passante équivalente δf se comporte comme un filtre intégrateur** sur une durée d'intégration :

$$T = \frac{1}{\delta f}$$

2.6.5 Notion de corrélation numérique

La corrélation numérique est une opération qui s'effectue sur le signal vidéo complexe après échantillonnage tout les intervalles « θ » et codage de celui ci. Le signal à traiter est alors composé de « n » échantillons de la forme :

$$Z(i.\theta) = Z_i = X_i + jY_i = A_i \cdot e^{j\phi_i}$$

La réplique à utiliser pour la corrélation sera, à un coefficient près, la quantité conjuguée de ce signal, décalée de k échantillons, soit :

$$R_j = Z_{i-k}^*$$

L'opération de corrélation consistera à calculer la somme sur « n » échantillons du produit du signal par sa réplique :

$$\rho(k.\theta) = \rho_k = \sum_{i=1}^n Z_i \cdot R_{i-k} = \sum_{i=1}^n Z_i \cdot Z_{i-k}^*$$

Cette somme est bien, à $1/n$ près, la fonction d'autocorrélation du signal.

S'agissant de calcul numérique, différents algorithmes peuvent être utilisés pour réduire le volume des opérations qui s'avère très important. En effet un calcul direct sur n échantillons demande :

- pour la réalisation des produits complexes ; $4n$ multiplication et $2n$ additions,
- pour effectuer la sommation $2n$ additions supplémentaires.

Soit un total de $8n$ opérations à répéter tout les $\delta t = q = 1/\Delta F$, intervalle de temps séparant deux échantillons du signal comme nous le verrons plus loin. Soit par exemple :

- $n = 100$
- $\Delta F = 10 \text{ MHz} = 10^7 \text{ Hz}$
- $N_{\text{ops}} = 8.10^9$ opérations par secondes.

3 LE BRUIT COMPORTEMENT TEMPOREL ET SPECTRAL

3.1 LE BRUIT, FONCTION ALEATOIRE DU TEMPS

Le bruit répond à deux propriétés :

- la tension de bruit varie au cours du temps,
- sa variation au cours du temps est imprévisible.

Nous regrouperons ces deux propriétés en disant que le bruit est une fonction aléatoire du temps.

Comme nous l'avons vu dans la définition des fonctions aléatoires, cette propriété n'est pas suffisante pour caractériser le bruit. Il faut pouvoir vérifier sa **stationnarité**. Les bruits naturels varient lentement au cours du temps avec :

- la température (bruit thermique),
- les dérives des amplificateurs,
- les dérives des sources de bruit,
- d'autre effets, par exemple le bruit perçu à travers une antenne en rotation.

Cependant à **l'échelle du temps de mesure du radar** (quelques millisecondes) nous pourrions supposer que les caractéristiques du bruit varient peu et donc que le **bruit peut être considéré comme stationnaire**.

Certains cas particuliers pourront ne pas entrer dans cette hypothèse, il conviendra alors d'en tenir compte, soit en recherchant une autre définition du bruit adapté au cas traité, soit en opérant avant traitement une «normalisation» du bruit.

Par ailleurs nous supposerons que les bruits naturels répondent au **principe ergodique** et donc que leurs moyennes temporelles et statistiques sont égales. On rétablira ci-après des modèles de bruit déjà utilisés au chapitre 10 et des propriétés du bruit établies au chapitre 6.

3.2 MODELE DE BRUIT SOUS PORTEUSE

Nous avons déjà admis que tout signal à bande étroite (ce qui est pratiquement toujours le cas en radar) peut être exprimé par une relation de la forme.

$$\Gamma(t) = \rho(t) \cos(\omega t + \varphi(t)) = \alpha(t) \cos(\omega t) + \beta(t) \cos(\omega t + \pi/2)$$

où ρ , φ , α et β sont des fonctions du temps.

Dans le cas des bruits naturels, nous pouvons poursuivre la définition du modèle en parlant de

la définition physique : «le bruit est la somme d'une infinité de tensions irrégulières qui se produisent au hasard au cours du temps», que nous allons appliquer au bruit en moyenne fréquence.

D'où l'expression suivante :

$$n(t) = \sum \alpha_i(t) \cos(\omega t) + \sum \beta_i(t) \cos(\omega t + \pi/2)$$

$$n(t) = \alpha(t) \cos(\omega t) + \beta(t) \cos(\omega t + \pi/2)$$

Le bruit se présente comme la modulation en amplitude de deux tensions en quadrature, $\alpha(t)$ et $\beta(t)$, elles-mêmes sommes algébriques à un instant donné « t » d'une infinité de tensions infinitésimales qui se produisent de manière aléatoire dans le temps.

La rapidité de variation de $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ est caractéristique de la cadence d'apparition des tensions élémentaires liée, nous le verrons plus loin au spectre du bruit.

$\alpha(t)$ et $\beta(t)$, étant la somme d'une infinité de variables aléatoires, suivent en probabilité une loi de Gauss, que nous supposons de moyenne nulle (des tensions négatives ayant a priori autant de chance de se produire que des tensions positives).

Par ailleurs, la répartition des puissances entre $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ n'ayant aucune raison d'être dissymétrique nous écrivons que ces deux fonctions aléatoires sont de même variance σ^2 .

EN CONCLUSION

Les bruits naturels peuvent en moyenne fréquence être décrits par l'expression :

$$n(t) = \alpha(t) \cos(\omega t) + \beta(t) \cos(\omega t + \pi/2)$$

dans laquelle $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ sont deux fonctions aléatoires

- indépendantes l'une de l'autre ;
- gaussiennes ;
- de valeur moyenne nulle ;
- de variance σ^2 .

Par ailleurs on peut calculer la **puissance efficace du bruit** en moyenne fréquence :

$$B = \lim_{T \Rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T n^2(t) dt$$

Qui se résume à :

$$B = \lim_{T \Rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_0^T \frac{\alpha^2(t)}{2} dt + \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\beta^2(t)}{2} dt \right]$$

les autres termes étant de valeur moyenne nulle. Donc :

$$B = \frac{1}{2} [\sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2]$$

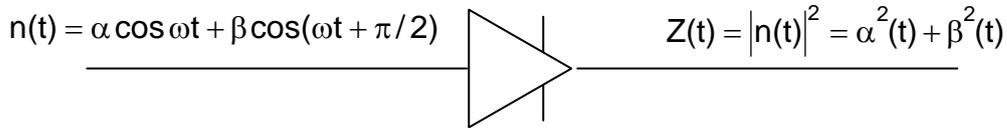
$$B = \sigma^2$$

3.3 MODELES DE BRUIT DETECTES

La loi de probabilité du bruit après détection dépend de la nature du détecteur.

3.3.1 Détecteur quadratique

Ce détecteur voit le carré du module du bruit MF.



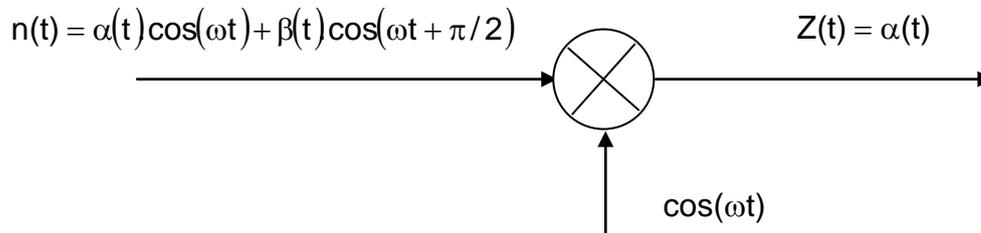
$Z(t)$ est donc la somme du carré de deux fonctions aléatoires gaussiennes de valeur moyenne nulle et de même variance σ^2 . C'est une loi de Laplace de moyenne $m = 2\sigma^2$

$$f(z) = \frac{1}{2\sigma^2} \exp\left\{-\frac{z}{2\sigma^2}\right\}$$

3.3.2 Démodulateur

Le démodulateur voit la composante du signal moyenne fréquence en phase avec le signal de démodulation.

Le schéma de la détection est alors le suivant :



Après passage dans un démodulateur le bruit se réduit donc à sa seule composante en phase avec le signal de référence, $\alpha^2(t)$ qui suit une loi de Gauss :

$$f(\alpha) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}\right\}$$

de variance $\sigma^2 = B$.

3.4 PUISSANCE DU BRUIT THERMIQUE, BRUIT BLANC

On démontre que la tension efficace d'un bruit thermique est donnée par la relation :

$$\overline{V_B} = \sqrt{4 \cdot R \cdot k \cdot T_B \Delta F}$$

- $\overline{V_B}$: en volts
- R : résistance de la source de bruit en ohms
- k : constante de Boltzman = $1,37 \cdot 10^{-23}$ W/Hz/°K
- T_B ; température de la source en °K
- ΔF : bande de la mesure en Hz

Que la puissance maximale transmissible par une source de résistance interne R est :

$$W = \frac{V^2}{4R}$$

Ceci permet d'écrire la **puissance moyenne** des bruits thermiques sous la forme bien connue :

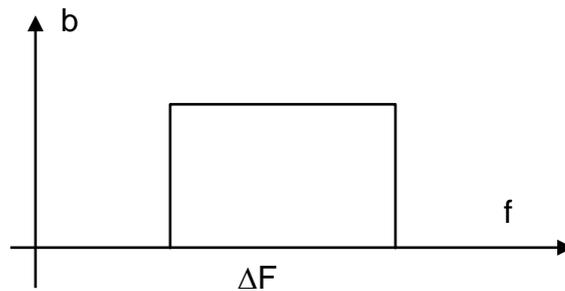
$$B = k.T_B.\Delta F$$

Qui peut se généraliser à tout bruit blanc en définissant une **densité spectrale** :

$$b = B/\Delta F = k.T_B$$

indépendante de la fréquence.

D'où le spectre de bruit au sens physique :

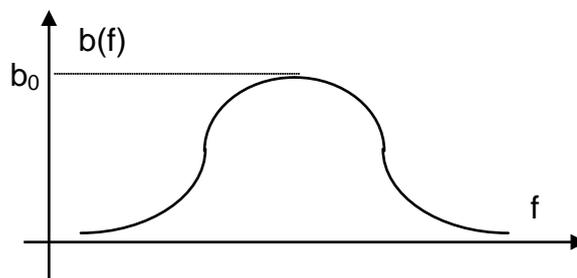


conduisant à la relation établie aux seules fréquences positives :

$$B = b.\Delta F$$

3.5 PUISSANCE D'UN BRUIT NON BLANC

Lorsque le bruit n'est pas blanc, b est une fonction de la fréquence observée. Le spectre de bruit prend alors l'allure suivante :



On peut alors écrire la **puissance du bruit** :

$$B = \int_0^{\infty} b(f) df$$

Et la bande passante équivalente de bruit, $\Delta F = B/b_0$

$$\Delta F = \frac{1}{b_0} \int_0^{\infty} b(f) df$$

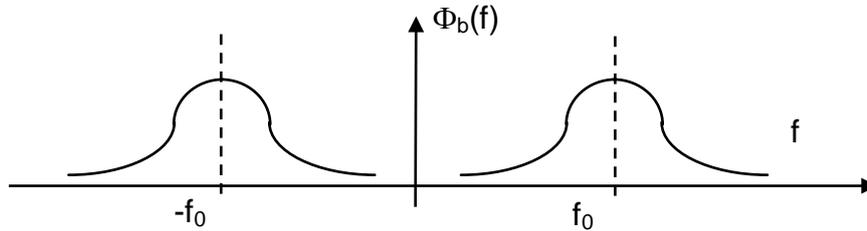
3.6 DENSITE SPECTRALE DU BRUIT

Nous avons défini la densité spectrale d'un signal aléatoire $\Phi(f)$ telle que l'on puisse écrire la puissance moyenne de ce signal :

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(f) df$$

et possédant la propriété

$$\Phi(-f) = \Phi(f)$$



Pour un bruit nous pouvons donc écrire :

$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_B(f) df = \int_0^{\infty} b(f) df$$

Il en résulte que, aux fréquences positives :

$$\Phi_B(f) = \frac{b(f)}{2}$$

relation reliant le spectre physique du bruit à son spectre généralisé «au sens de Fourier» utilisé dans l'étude des fonctions aléatoires.

3.7 BRUIT VIDEO COMPLEXE

3.7.1 Définition

De la même manière que l'on a défini un signal vidéo complexe à partir de la «partie utile» du signal sous porteuse $A_1(t)$ on peut associer au bruit moyenne fréquence :

$$n(t) = \alpha(t)\cos(\omega t) + \beta(t)\cos(\omega t + \pi/2)$$

un bruit vidéo complexe :

$$N(t) = \alpha(t) + j\beta(t)$$

ω étant supposé connu, $N(t)$ permet à lui seul de caractériser le bruit $n(t)$.

3.7.2 Variance de $N(t)$

$N(t)$ est la somme de deux variables aléatoires de valeur moyenne nulle et de variance σ^2 . De plus, ces deux variables sont en quadrature, ce qui permet d'écrire le module de $N(t)$:

$$|N(t)|^2 = \alpha^2(t) + \beta^2(t)$$

d'où la puissance moyenne de bruit vidéo complexe :

$$\sigma_c^2 = \frac{\text{Lim}}{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T |N(t)|^2 dt = \frac{\text{Lim}}{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T [\alpha^2(t) + \beta^2(t)] dt$$

$$\sigma_c^2 = 2\sigma^2 = 2B$$

3.7.3 Loi de probabilité de N(t)

N(t) est une fonction aléatoire définie par le couple des signaux aléatoires $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ indépendants entre eux. Il en résulte que la densité de probabilité de N(t) peut s'écrire :

$$f_n(N) = f(\alpha)f(\beta)$$

On connaît par ailleurs les lois de $\alpha(t)$ et $\beta(t)$, ce qui permet d'écrire :

$$f(\alpha) = f(\beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{(\alpha \text{ ou } \beta)^2}{2B} \right\}$$

$$f(\alpha)f(\beta) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{ -\frac{(\alpha^2 + \beta^2)}{2B} \right\}$$

Si on remarque que $\alpha^2 + \beta^2 = [N]^2$ on aboutit à :

$$f_n(N) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{ -\frac{|N|^2}{2B} \right\}$$

3.7.4 Filtre vidéo équivalent

Cette notion établie sur les signaux vidéo complexes est transposable au bruit complexe. Si $F_v(f)$ est la transmittance du filtre appliqué au signal (et bruit) vidéo, on retiendra que son action sous porteuse est équivalente à celle d'un filtre $F_1(f)$ tel que :

$$|F_1(f)|^2 = |F_v(f - f_0)|^2 + |F_v(f + f_0)|^2$$

dès que les signaux sont disjoints aux fréquences positives et négatives.

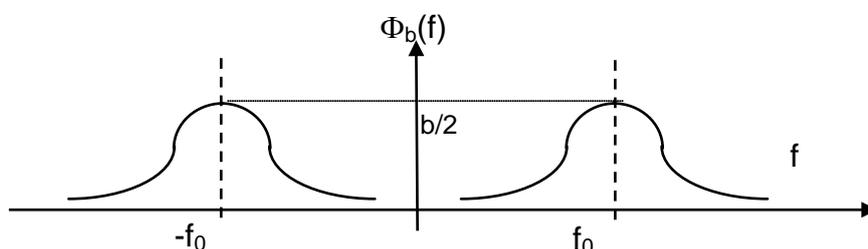
Cette propriété permet de calculer directement le bruit sous porteuse à partir de la transmittance du filtre vidéo équivalent comme il l'est établi au paragraphe suivant.

Avant filtrage :

$$\Phi_B = b/2$$

Après filtrage :

$$\Phi_b(f) = \frac{b}{2} |F_v(f - f_0)|^2 + \frac{b}{2} |F_v(f + f_0)|^2$$



Soit en opérant les changements de variables : $u = f - f_0$; $v = f + f_0$:

$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{b}{2} |F_v(f - f_0)|^2 + \frac{b}{2} |F_v(f + f_0)|^2 \right] .df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b}{2} |F_v(u)|^2 du + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b}{2} |F_v(v)|^2 dv$$

$$B = b \int_{-\infty}^{+\infty} |F_v(f)|^2 .df$$

Equation du filtrage d'un bruit sous porteuse par un calcul direct en fonction de la transmittance du filtre vidéo équivalent.

Cette formulation simplifiée ne doit pas cependant faire oublier qu'il s'agit de la puissance d'un bruit sous porteuse.

**4 SIGNAUX RADAR
CARACTERISTIQUES – PROPAGATION**

4.1 SIGNAUX UTILISE EN RADAR

A l'exception des radars à très large bande pouvant couvrir plusieurs octaves, tous les radars utilisent des signaux définis autour d'une porteuse de la forme déjà citée :

$$A_1(t) = A(t) . \text{Cos}[\omega . t + \varphi(t)]$$

$A_1(t) = X(t) . \text{Cos}(\omega . t) + Y(t) . \text{Cos}(\omega . t + \pi/2)$ Ces divers signaux se distinguent par le comportement des fonctions $A(t)$; $\varphi(t)$; $X(t)$; $Y(t)$; au cours du temps. Dans ce qui suit leur durée sera définie par les notations T ou τ ; elle est toujours finie.

a. Signal impulsionnel classique

C'est le signal utilisé dans les radars classiques à impulsion. Il se caractérise par les propriétés suivantes :

- $A(t) = A$ est constante pendant la durée τ de l'impulsion,
- $\varphi(t) = \varphi_0$ est également constante, c'est la phase à l'origine du signal.

Si on considère non pas une impulsion isolée mais un train d'impulsions, φ_0 doit rester la même quel que soit le rang de l'impulsion observée, c'est le cas des radars cohérents.

b. Signal codé

On appelle signal codé un signal dont les caractéristiques varient au cours de son existence.

- variation continue ou pseudo aléatoire de f ou φ pendant la durée du signal
- codage de $A(t)$

Les codes choisis peuvent être **déterministes** (loi simples d'équations connues) ou **pseudo aléatoires** (tirage d'une variable aléatoire, codes de Barker, Hufmann, Frank, Galois...). Leur contenu est alors connu de celui qui les a émis mais aléatoire pour un étranger à leur création, d'où leur nom de pseudo aléatoire.

c. Signal aléatoire

Dans ce cas, le signal est un **échantillon pris sur une fonction aléatoire du temps** (par exemple échantillon de bruit écrêté), caractère portant généralement sur sa phase, plus rarement sur son amplitude.

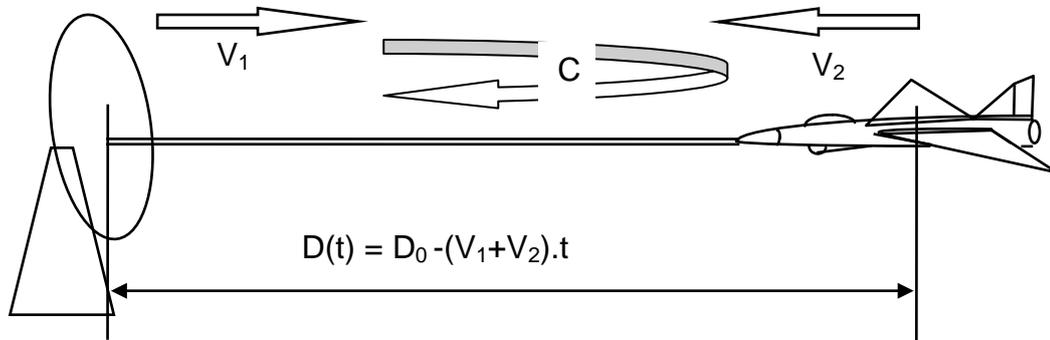
Les signaux RADAR étant de durée finie de tels signaux ne peuvent être caractérisés qu'en moyenne.

4.2 SIGNAUX REÇUS APRES PROPAGATION - EFFET DOPPLER (théorie non relativiste)

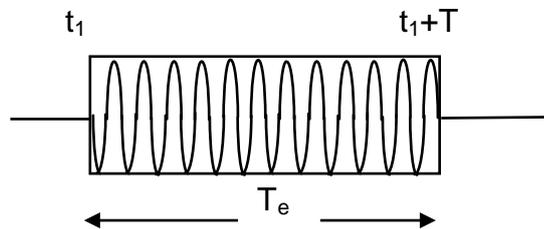
Soit une cible située à un instant de référence (instant « 0 ») à une distance D_0 d'un radar, V_1 et V_2 les projections sur l'axe radar-cible des vitesses propres du radar et de la cible, de telle manière que l'on puisse définir une vitesse de rapprochement : $V_R = V_1 + V_2$.

Ceci permet d'écrire la distance radar-cible :

$$D(t) = D_0 - (V_1 + V_2).t.$$



Le signal émis par le radar a l'allure suivante :



Le front de montée du signal, émis à l'instant t_1 , sera reçu par la cible à l'instant t_{r1} :

$$t_{r1} = t_1 + dt_1 = t_1 + D_1(t)/(C + V_2) = t_1 + (D_0 - (V_1 + V_2).t_1)/(C + V_2)$$

Le front de montée du signal, émis à l'instant $t_2 = t_1 + T_e$, sera reçu à l'instant t_{r2} :

$t_1 + T_e + dt_2 = t_1 + T_e + D_2(t)/(C + V_2) = t_1 + T_e + (D_0 - (V_1 + V_2).(t_1 + T_e))/(C + V_2)$ où la durée du signal perçu par la cible, si C est la vitesse de l'onde :

$$T_r = t_{r2} - t_{r1} = T_e - (V_1 + V_2)T_e/(C + V_2) = T_e(C + V_2 - V_1 - V_2)/(C + V_2) \quad T_r = T_e(C - V_1)/(C + V_2)$$

Le phénomène étant de même nature sur le trajet retour on pourra donc écrire pour le trajet aller et retour :

$$T_r = T_e \frac{(C - V_1).(C - V_2)}{(C + V_1).(C + V_2)}$$

c'est donc la durée du signal radar qui se trouve modifiée par les mouvements relatifs du radar et de la cible, indépendamment de la distance de la cible au radar. **On assiste donc à une compression ou à une expansion temporelles du signal dans un rapport dépendant des seules vitesses des cibles et de l'onde radar.**

De par l'effet de la propagation le signal radar subit donc les transformations suivantes :

a. Retard global du signal

Si on considère un signal émis à l'instant t_0 , le retard subi par le front de montée du signal est égal à $(C$ très grand devant V_1 et $V_2)$:

$$\Delta t = \frac{2D_0 \cdot C}{(C + V_1) \cdot (C + V_2)} \approx \frac{2 \cdot D_0}{C}$$

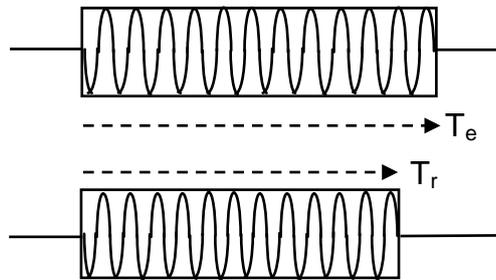
C'est ce retard qui définit la phase à l'origine φ_0 du signal.

b. Variation de la durée du signal reçu

Le rapport entre la durée du signal reçu et la durée du signal émis s'écrit également :

$$\frac{T_r}{T_e} = \frac{(C - V_1) \cdot (C - V_2)}{(C + V_1) \cdot (C + V_2)} \approx \left(1 - \frac{2 \cdot V_R}{C}\right)$$

Avec $V_R = V_1 + V_2$.



c. Variation de la fréquence du signal reçu

La fréquence du signal reçu varie dans le rapport inverse de celui de sa durée, ce qui permet d'écrire :

$$\frac{f_r}{f_e} = \frac{(C + V_1) \cdot (C + V_2)}{(C - V_1) \cdot (C - V_2)} \approx \left(1 + \frac{2 \cdot V_R}{C}\right)$$

$$f_r = f_e \cdot \frac{(C + V_1) \cdot (C + V_2)}{(C - V_1) \cdot (C - V_2)} \approx f_e \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot V_R}{C}\right)$$

Soit pour les signaux à bande étroite, où la largeur de bande du signal est faible devant sa fréquence porteuse :

$$f_e \approx f_0 \Rightarrow = \text{Cte}$$

$$f_d = f_r - f_0 = f_0 \frac{2 \cdot V_R}{C}$$

$$C / f_0 = \lambda$$

$$f_d = \frac{2 \cdot V_r}{\lambda}$$

Expression où λ est la longueur d'onde du radar. On retrouve ici la manifestation bien connue de l'effet doppler dont le mécanisme est le suivant (exemple des ondes acoustiques) :

- Lorsque le mobile se rapproche de l'observateur, les ondes produites par le mobile ont, pour frapper l'oreille de l'observateur, de moins en moins de chemin à parcourir. Il en résulte un tassement dans le temps de ces ondes, d'où une augmentation de la fréquence du son perçu par l'observateur, liée à la vitesse de rapprochement du mobile, d'autant plus sensible que cette vitesse est grande.

- Inversement, lorsque le mobile s'éloigne de l'observateur, les ondes produites par le mobile ont, pour frapper l'oreille de l'observateur, de plus en plus de chemin à parcourir. Il en résulte un étalement dans le temps du signal reçu, d'où une diminution de la fréquence du son perçu par l'observateur, liée à la vitesse d'éloignement du mobile, d'autant plus sensible que cette vitesse est grande.

d. Evolution de la phase du signal reçu par rapport au signal émis

Le signal reçu se distingue du signal émis par une phase à l'origine φ_0 , liée au trajet global de l'onde, et une dérive de fréquence f_d , liée à la vitesse relative cible radar. On peut donc écrire la différence de phase entre le signal reçu et le signal émis :

$$\varphi(t) = \varphi_0 + 2\pi f_d t$$

En particulier, si le signal émis est un signal périodique de période T_R , l'expression général de la phase d'un signal de rang « n » s'écrira :

$$\varphi_n(t) = \varphi_0 + 2\pi f_d (t + n \cdot T_R)$$

Et la différence de phase entre deux signaux successifs :

$$\delta\varphi = \varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t) = 2\pi f_d T_R$$

e. Expression générale du signal reçu

Le signal émis a pour expression complexe :

$$z(t) = Z(t) e^{2\pi f_0 t}$$

Il lui correspond le signal reçu retardé de t_0 , déphasé de $\varphi_0 + 2\pi f_d t$, atténué dans le rapport k :

$$z_r(t) = k \cdot e^{j\varphi_0} Z(t - t_0) e^{j2\pi(f_d + f_0)t}$$

soit en définissant une atténuation complexe $\Gamma = k \cdot e^{j\varphi_0}$ et en s'intéressant au signal vidéo complexe :

$$Z_r(t) = \Gamma \cdot Z(t - t_0) e^{j2\pi f_d t}$$

$$Z_r(t) = \gamma \cdot a(t - t_0) e^{j2\pi f_d t}$$

Dernière expression où $a(t)$ est le signal d'énergie unitaire et $\gamma = \rho \cdot e^{j\varphi_0}$ l'atténuation complexe ramenée à cette référence.

On rappelle que ces résultats ne sont valables que pour des signaux à bande étroite où $\Delta F \ll f_0$ et dans le cas des ondes radar où : $C \gg V_R$.

4.3 ECHANTILLONNAGE DES SIGNAUX RADAR

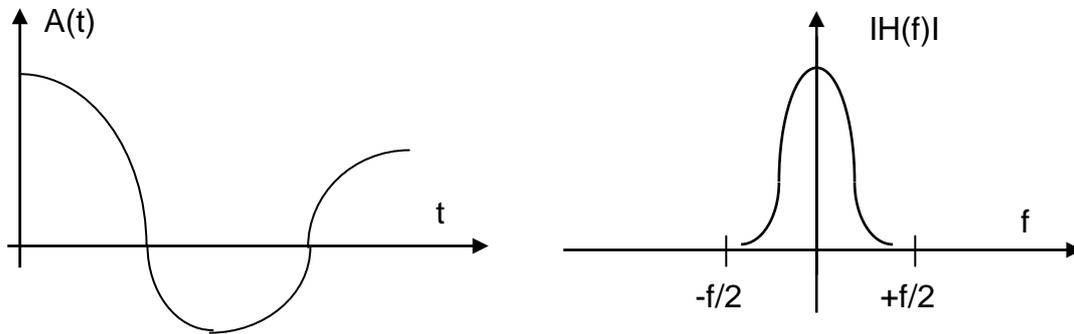
La notion d'échantillonnage est importante sous deux aspects :

- lorsque l'on désire effectuer le traitement du signal sous forme numérique, ou tout simplement lorsque l'on veut mémoriser des signaux sans perdre d'information, se pose la question de la fréquence optimale d'échantillonnage ;
- lorsque les signaux (ou les bruits) sont aléatoires, elle permet de préciser le degré de liberté (nombre d'échantillons indépendants) d'un signal de durée donnée. Cette notion est utilisée en particulier pour estimer l'effet de filtres intégrateurs sur de tels signaux.

Après avoir établi la théorème de Shannon sur des signaux quelconques, nous examinerons son cas pratique d'application aux signaux radar et l'effet apporté par des échantillons de durée non nulle.

4.3.1 Théorème de Shannon

Soit un signal $A(t)$ dont le spectre est entièrement contenu entre les fréquences extrêmes $-f/2$ et $f/2$.



On échantillonne ce signal en prélevant des échantillons de son amplitude, supposés de durée nulle, à des intervalles de temps δt .

Le problème posé est d'être capable de restituer le signal initial $A(t)$ par simple filtrage du signal échantillonné $A_e(t)$, donc à établir une condition pour que le signal échantillonné $A_e(t)$ contienne toute l'information du signal initial $A(t)$.

Ceci nous conduit au préalable à établir la nature de spectre du signal $A_e(t)$.

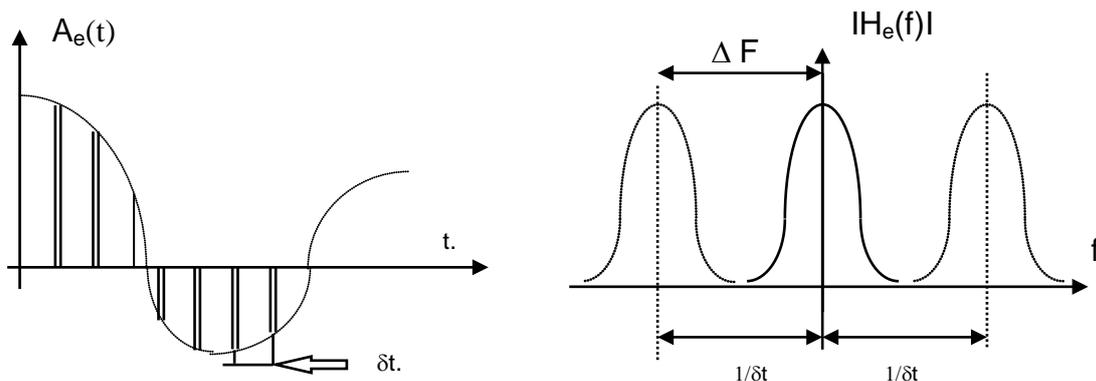
Nous savons que tout signal périodique de période T_R a un spectre de raies dont les raies sont espacées de :

$$\delta f = \frac{1}{T_R}$$

D'après la propriété de symétrie des transformées de Fourier :

$$A(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) e^{j2\pi f.t} df ; H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(t) e^{-j2\pi f.t} dt$$

On peut aisément en déduire que, inversement, un signal dont le spectre est périodique de période ΔF , est un signal formé de « raies » ou échantillons de durée nulle, régulièrement espacés dans le temps à intervalle $\delta t = 1/\Delta F$.



Le spectre du signal $A_e(t)$ est donc la répétition tous les $\Delta F = 1/\delta t$ du spectre du signal initial $A(t)$.

Celui ci pourra être reconstitué à l'aide d'un simple filtre passe bande autorisant les fréquences comprises entre $-f/2$ et $+f/2$ à l'unique condition que :

$$\Delta F \gg f \quad \text{ou} \quad \delta t \ll 1/f$$

de manière que le spectre de $A(t)$ soit séparable à l'intérieur du spectre de $A_e(t)$.

Le nombre minimal d'échantillons permettant de restituer le signal initial répondra alors à la condition limite $\delta t = 1/f$.

Dans ce cas, on peut considérer que les échantillons pris sur le signal $A(t)$ sont tous indépendants entre eux, car s'il n'en était pas ainsi on pourrait réduire leur nombre en trouvant des relations qui les lient, ce qui est contraire à l'hypothèse précédente.

En conclusion nous retiendrons les règles suivantes :

1. Le spectre obtenu en échantillonnant tout les δt un signal $A(t)$, est la répétition tous les $\Delta F = 1/\delta t$ du spectre du signal initial $A(t)$.
2. **Si la fréquence la plus élevée du spectre du signal est $f/2$** , il suffit pour connaître parfaitement ce signal de l'échantillonner tout les **$\delta t = 1/f$** .
3. Dans ce cas, **tous les échantillons pris sur le signal $A(t)$ sont indépendants**.

Les points 2 et 3 constituent le **Théorème de Shannon**.

Dans le cas général d'un signal sous porteuse, on serait donc amené à échantillonner le signal à au moins deux fois la porteuse augmenté de la bande du signal.

4.3.2 Critères pratiques d'application

Nous savons qu'à tout signal sous porteuse $A_1(t)$ on peut associer un signal vidéo complexe $Z(t)$ contenant toute l'information utile.

En effet, on rappelle que le spectre $H_1(f)$ du signal $A_1(t)$ s'exprime en fonction du spectre $H(f)$ de $Z(t)$ par la relation :

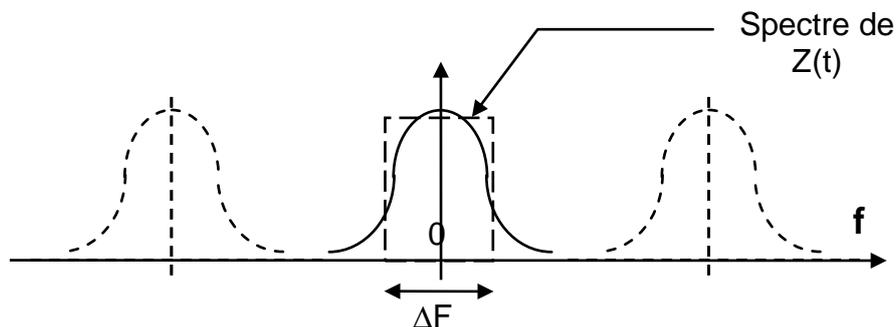
$$H_1(f) = \frac{1}{2} \left[e^{j\varphi} \cdot H(f - f_0) + e^{-j\varphi} \cdot H(-f - f_0) \right]$$

Où :

- φ est la phase à l'origine du signal,
- f_0 est la fréquence porteuse du signal.

La connaissance de $H(f)$; φ et f_0 suffit à restituer le signal $A_1(t)$.

Le spectre $H(f)$ de $Z(t)$ est centré autour de la fréquence zéro et son spectre est compris entre $-\Delta F/2$ et $+\Delta F/2$.



On aboutit ainsi aux **règles pratiques** suivantes : Si le spectre du signal vidéo complexe est entièrement contenu dans l'intervalle $\Delta F/2 + \Delta F/2$ il suffira de l'échantillonner tout les :

$$\delta t = \frac{1}{\Delta F}$$

Si en outre T est la durée totale du signal on ne pourra prendre pour définir complètement ce signal que :

$$N = T \cdot \Delta F$$

échantillons indépendants.

Par ailleurs, en pratique, ΔF est pris voisin de la bande passante équivalente ou « spectre utile » du signal :

$$\Delta F = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df}{|H_{\max}|^2}$$

Un échantillonnage tout les $\delta t = 1/\Delta F$ n'entraîne qu'une perte relativement faible (de l'ordre de 2 dB) sur l'information traitée

Un échantillonnage tout les $\delta t = 1/2 \Delta F$ entraîne une perte quasi nulle.

Pour des raisons de simplicité de traitement (et de codage) les cadences pratiques sont comprises entre ces deux valeurs, typiquement $1/\Delta F$ à $0.7/\Delta F$.

L'échantillonnage pourra se faire :

- Sur le signal vidéo complexe après restitution de ces deux composantes par double démodulation (Cf & 1.1.1). Dans ce cas la linéarité de l'ensemble de détection (détecteur amplitude phase, filtres passe bas, codeur) et la maîtrise du déphaseur $\pi/2$ devront être suffisantes pour ne pas introduire de défauts sur le signal codé, dans toute la dynamique recherchée.
- Directement sous porteuse. Dans ce cas l'échantillonnage devra être synchrone de la porteuse pour être caractéristique de la seule modulation du signal et la restitution des deux composantes du signal vidéo complexe demandera de procéder à deux séries d'échantillons distants de $\varepsilon_t = \pi/2\omega$, si ω est la pulsation de la porteuse du signal.

4.3.3 Echantillons de durée non nulle

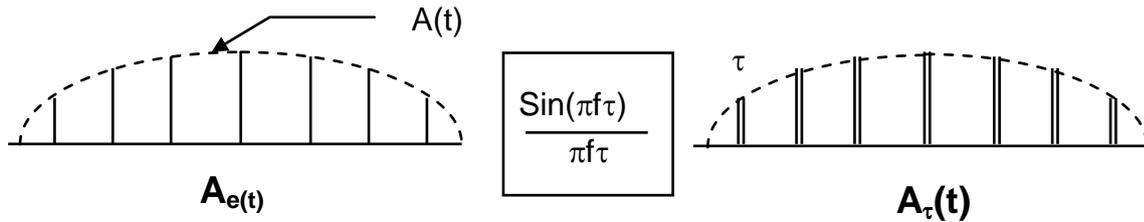
Considérons le signal $A_e(t)$ échantillonnage du signal $A(t)$ par des échantillons de durée nulle et le signal $A_\tau(t)$ échantillonnage du même signal par des impulsions de durée τ .

La différence entre les deux signaux échantillonnés provient du fait que les impulsions composant $A_\tau(t)$ ont un spectre défini (à un coefficient près) par l'expression :

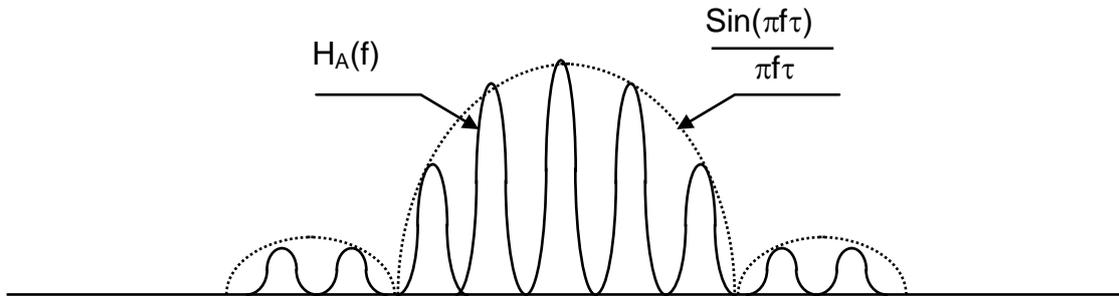
$$H_\tau(f) = \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau}$$

On peut donc (à un coefficient près) passer de $A_e(t)$ à $A_\tau(t)$ en filtrant chacun des échantillons de $A_e(t)$ par un filtre dont la transmittance reproduit le spectre de l'impulsion de durée τ échantillonnant le signal $A_\tau(t)$.

D'où le schéma suivant :



Le spectre du signal $A_\tau(t)$ sera donc, comme le spectre de $A_e(t)$ la répétition du spectre du signal initial $A(t)$, mais globalement pondéré par le spectre de l'impulsion d'échantillonnage.



Cette propriété s'étend à des échantillons de formes quelconques en écrivant :

$$H_r(f) = H_e(f)H(f)$$

Où :

- $H_e(f)$ est le spectre obtenu par échantillonnage de $A(t)$ par des signaux de durée nulle.
- $H_r(f)$ est le spectre obtenu par échantillonnage de $A(t)$ par des signaux de durée non nulle.
- $H(f)$ est le spectre du signal d'échantillonnage.

Quoique $H_r(f)$ ne soit plus la réplique exacte de la répétition du spectre du signal $A(t)$, la déformation est faible autour de la fréquence zéro, notamment pour des rapport T_R/τ élevés.

On notera en outre, comme pour les échantillons de durée nulle, que si on désire conserver une cohérence des échantillons sur toute la durée d'un signal sous porteuse, il est nécessaire que la cadence d'échantillonnage soit synchrone de la porteuse.

4.4 PUISSANCES ET ENERGIES DES SIGNAUX RADAR

Considérations pratiques

En toute rigueur, les signaux vidéo complexe (cf. § 1.4) correspondant au signal et au bruit sous porteuse perçu par un radar s'écrivent :

$$A_1(t) = A(t) \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi(t))$$

$$Z(t) = A(t) \cdot e^{j\varphi(t)}$$

et

$$n(t) = \alpha \cdot \cos(\omega_0 t) + \beta \cdot \cos(\omega_0 t + \pi/2)$$

$$N(t) = \alpha + j\beta$$

La puissance sous porteuse s'écrit (cf. § 1.2.5) :

$$S(t) = \frac{A^2(t)}{2}$$

La puissance du signal vidéo complexe s'écrit (cf. §1.2.6)

$$S_v(t) = |Z(t)|^2 = A^2(t)$$

Il en résulte que la puissance du signal vidéo complexe est le double de la puissance du signal sous porteuse, Il en va de même pour leurs énergies, ce qui permet d'écrire :

$$E_v = 2E$$

La puissance du bruit sous porteuse B (cf. § 3.2) est égale à la variance (puissance) des variables aléatoires α et β .

$$\sigma_\alpha^2 = \sigma_\beta^2 = B$$

La puissance du bruit complexe est pour sa part (cf. § 3.7) égale à la somme des puissances portées par les variables aléatoires α et β , soit $2B$.

$$B_v = 2B$$

Il en va de même pour la densité spectrale : égale à b pour le bruit sous porteuse et $2b$ pour le bruit vidéo complexe.

$$b_v = 2b$$

Il en résulte une égalité des rapports signal sur bruit sous porteuse et en signal vidéo complexe ce qui permet d'écrire :

$$\left(\frac{S}{B} \right)_v = \frac{S}{B}$$

$$\left(\frac{E}{b} \right)_v = \frac{E}{b}$$

Ces considérations simples seront à retenir lors de l'étude des performances des récepteurs.

5 ANNEXE EFFET DOPPLER RELATIVISTE

5.1 RAPPEL DE CINEMATIQUE RELATIVISTE

a. Postulats de base

Les lois physiques s'expriment dans un référentiel par des lois ne faisant pas intervenir sa vitesse.

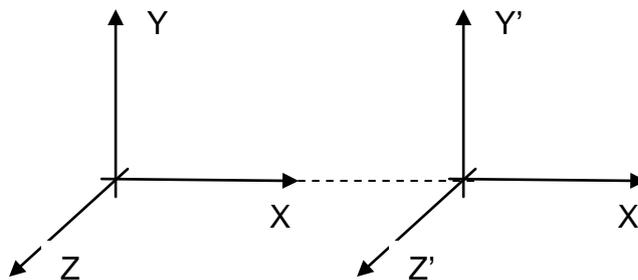
L'intervalle S entre deux évènements défini par la relation :

$$S^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 - C^2T^2$$

est le même dans tout repère animé d'une vitesse constante.

b. Changement de repère

Soient deux repères se déduisant l'un de l'autre par une translation à vitesse constante V selon OX .



Dans le changement de repère on posera :

$$Y = Y' ; Z = Z'$$

et on recherche une relation linéaire entre $X ; X' ; T ; T'$ de la forme :

$$X = a X' + b T'$$

$$T = e X' + f T'$$

Connaissant la conservation de l'intervalle dans les deux repères :

$$X^2 - C^2.T^2 = X'^2 - C^2.T'^2$$

Ce qui conduit à poser :

$$a^2 - C^2e^2 = 1 \rightarrow (1)$$

$$b^2 - C^2f^2 = -C^2 \rightarrow (2)$$

$$ab - C^2ef = 0 \rightarrow (3)$$

Pour : $X' = 0 ; X = bT'$ et $T = fT'$; d'où : $V = b/f$

Pour : $X = 0 ; aX' + bT' = 0$; d'où : $V' = - b/a$

Comme : $V' = - V ; f = a$; et $b = aV = fV$

Dans (2) cela se traduit par : $a^2v^2 - a^2C^2 = -C^2$; soit : $a = f = \Gamma = (1 - V^2/C^2)^{1/2}$

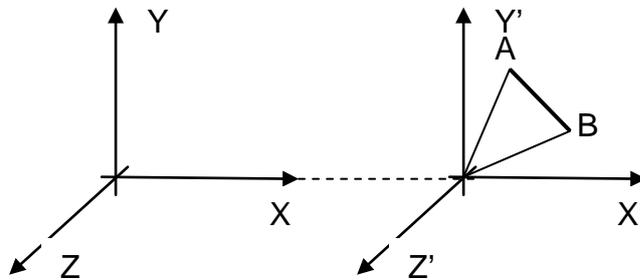
Dans (1) cela se traduit par : $\Gamma^2 - C^2e^2 = 1$; soit : $e = V.T/C^2$

D'ou les relations de changement de repère :

$$\begin{aligned} X &= \Gamma (X' + VT') \\ T &= \Gamma \left(\frac{VX'}{C^2} + T' \right) \\ \Gamma &= \left(1 - \frac{V^2}{C^2} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

a. Contraction des longueurs

Soit un segment AB fixe dans le repère X'.Y'.Z'



Sa longueur s'écrit :

$$\ell_0^2 = (X'_B - X'_A)^2 + (Y'_B - Y'_A)^2 + (Z'_B - Z'_A)^2$$

Dans le repère X.Y.Z :

$$X = \Gamma (X' + VT') ; Y = Y' ; Z = Z'$$

D'ou la longueur du segment AB dans ce repère :

$$\ell^2 = \Gamma^{-2} (X'_B - X'_A)^2 + (Y'_B - Y'_A)^2 + (Z'_B - Z'_A)^2 < \ell_0^2$$

Tout segment fixe dans un repère donne, présente une longueur inférieure dans les autres repères. En particulier si AB est sur l'axe des X :

$$\ell = \ell_0 \left(1 - V^2 / C^2 \right)^{1/2}$$

b. Dilatation des durées

Soit deux évènements se produisant en un point fixe dans le repère X'.Y'.Z' et distant de :

$$d_0 = T'_2 - T'_1$$

$$T_1 = \Gamma \left(\frac{VX'_1}{C^2} + T'_1 \right)$$

$$T_2 = \Gamma \left(\frac{VX'_2}{C^2} + T'_2 \right)$$

$$d = T_2 - T_1 = \Gamma (T'_2 - T'_1) = \Gamma . d_0$$

Si deux évènements se produisent en un même lieu dans un espace quelconque, la durée qui les sépare dans cet espace est la durée propre.

Dans tout autre espace, la durée séparant ces évènements

$$d = \Gamma . d_0 = d_0 \left(1 - V^2 / C^2 \right)^{-1/2}$$

est supérieure.

c. Transformation de vecteur vitesse

En différenciant les formules de changement de repère il vient :

$$dX = \Gamma (dX' + VdT')$$

$$dT = \Gamma (\frac{VdX'}{C^2} + dT')$$

$$dY = dY'$$

$$dZ = dZ'$$

D'où :

$$v_x = \frac{dX}{dT} = \frac{dX' + VdT'}{dT' + \frac{V}{C^2}dX'} = \frac{dX'/dT' + V}{1 + \frac{V}{C^2} \frac{dX'}{dT'}}$$

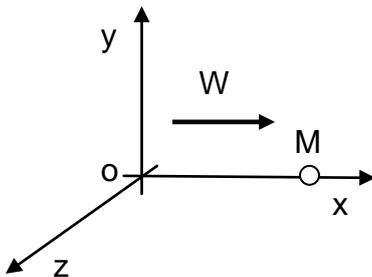
$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x \cdot V}{C^2}}$$

On a également :

$$v_y = \frac{v'_y}{1 + \frac{v'_y \cdot V}{C^2}} \Leftrightarrow v_z = \frac{v'_z}{1 + \frac{v'_z \cdot V}{C^2}}$$

5.2 CALCUL DE L'EFFET DOPPLER EN MILIEU NON RELATIVISTE

Préliminaire

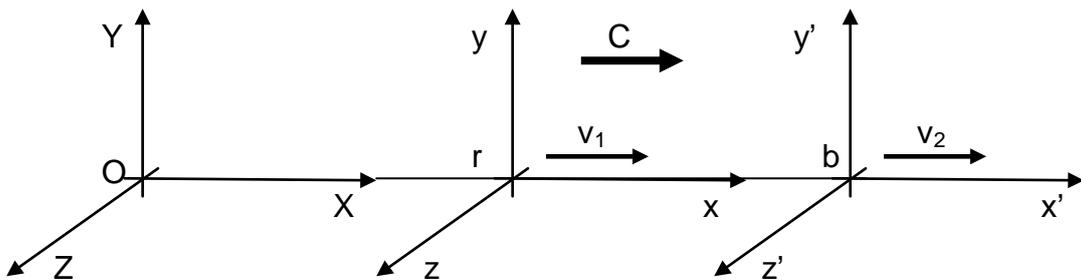


Soit un point M de coordonnées $x_M(t)$ sur l'axe OX du repère $OXYZ$, et un signal issu de O parallèle à OX et de vitesse W

La phase du signal reçu en M est alors :

$$\phi(t, x_M) = 2\pi (t - x_M(t) / W)$$

Milieu non relativiste



Soit un repère fixe $OXYZ$, un repère radar $r x y z$, de vitesse selon OX : v_1 ; un repère but $b x' y' z'$ de vitesse selon OX : v_2 et un signal ce déplaçant à la vitesse C selon OX , les trois vitesse étant référencées au repère fixe $OXYZ$.

Trajet aller

Dans le repère radar :

$$W_r = C - v_1$$

$$x_b = D_0 + (v_2 - v_1)t$$

$$\phi(t, x_b) = 2\pi f \left(t - \frac{D_0 + (v_2 - v_1)t}{C - v_1} \right)$$

$$\phi(t, x_b) = 2\pi f \frac{C - v_2}{C - v_1} \left(t - \frac{D_0}{C - v_2} \right)$$

$$\phi(t, x_b) = 2\pi f \frac{C - v_2}{C - v_1} (t - \delta t_{01})$$

avec

$$\delta t_{01} = \frac{D_0}{C - v_2}$$

Changement de repère

Pour passer dans le repère « but » on écrit :

$$x' = x - x_b$$

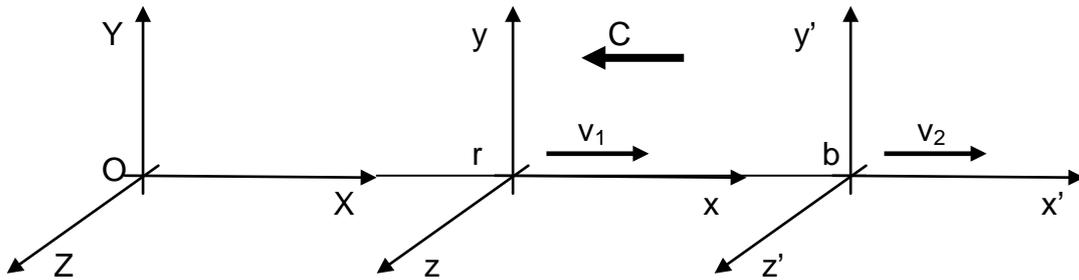
$$t' = t - \delta t_0$$

$$f' = f \frac{C - v_2}{C - v_1}$$

$$\phi(t', 0) = 2\pi f' \cdot t'$$

Trajet retour

Dans le repère « but », la vitesse de l'onde étant inversée



$$W_b = (C + v_2)$$

$$x'_r = -x_b = -(D_0 + (v_2 - v_1)t' - \delta t_0)$$

$$\phi(t', x'_r) = 2\pi f (t' - x'_r / W_b)$$

$$\phi(t', x'_r) = 2\pi f \left(t' - \frac{v_2 - v_1}{C + v_2} t' - \frac{D_0 + (v_2 - v_1)\delta t_0}{C + v_2} \right)$$

$$\phi(t', x'_r) = 2\pi f \frac{C + v_1}{C + v_2} \left(t' - \frac{D_0 + (v_2 - v_1)\delta t_0}{C + v_1} \right)$$

Si on remarque que :

$$D'_0 = D_0 + (v_2 - v_1)\delta t_0$$

est la distance radar but au moment de la réémission du signal,

on peut écrire la durée du trajet retour de l'onde, la vitesse de rapprochement de l'onde vers le radar étant $C + v_1$:

$$\delta t'_{02} = \frac{D'_0}{C + v_1}$$

$$\phi(t', x'_r) = 2\pi f \left(\frac{C + v_1}{C + v_2} t' - \delta t'_{02} \right)$$

Retour au repère radar

On écrit :

$$\begin{aligned} t' &= t - \delta t_{01} \\ x &= x' - x'_r \\ f' &= f \frac{C + v_1}{C + v_2} = f \left(\frac{C - v_2}{C - v_1} \right) \frac{C + v_1}{C + v_2} \end{aligned}$$

On peut écrire

$$\phi(t, 0) = 2\pi f' (t - \delta t_{01} - \delta t_{02})$$

On retrouve bien les résultats du paragraphe 4.2 avec $V_1 = v_1$ et $V_2 = -v_2$:

$$f'_r = f_e \left(\frac{C + V_1}{C - V_1} \right) \frac{C + V_2}{C - V_2}$$

et le retard global de l'onde s'écrira tous calcul faits :

$$\delta t_0 = \frac{2D_0 C}{(C + V_1)(C + V_2)}$$

5.3 APPLICATION EN MILIEU RELATIVISTE

5.3.1 Particularités du milieu relativiste

En milieu relativiste il faut tenir compte des données suivantes :

- la vitesse des ondes est C qu'el que soit le repère ;
- les équation de changement de repaires sont modifiées comme suit :

	<p>Référence radar</p> $x = \Gamma (x' + t')$ $t = \Gamma \left(t' + \frac{V}{C^2} x' \right)$ $\Gamma = \left(1 - \frac{V^2}{C^2} \right)^{1/2}$
	<p>Référence but</p> $x' = \Gamma (x - Vt)$ $t' = \Gamma \left(t - \frac{V}{C^2} x \right)$

- $V = v_2 - v_1$ vitesse du but et du radar comptées à partir d'un repère fixe ;
- Le repère fixe est choisi de telle manière que $D_0 = 0$.

5.3.2 Onde se propageant selon ox ; trajet aller

Dans le repère radar :

$$\phi(t,0) = 2\pi f t$$

$$W = C$$

$$\phi(t,x) = 2\pi f \left(t - \frac{x}{C} \right)$$

en un point quelconque d'abscisse x.

Soit en passant dans le repère but :

$$x = \Gamma (x' + Vt')$$

$$t = \Gamma \left(t' + \frac{V}{C^2} x' \right)$$

$$\phi(t',x') = 2\pi f \cdot \Gamma \left(t' + \frac{V}{C^2} x' - \frac{x' + Vt'}{C} \right)$$

$$\phi(t',x') = 2\pi f \cdot \Gamma \left(1 - \frac{V}{C} \right) t' - \frac{x'}{C}$$

$$\phi(t',0) = 2\pi f \cdot \Gamma \left(1 - \frac{V}{C} \right) t'$$

$$f' = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi}{dt'} = f \cdot \Gamma \left(1 - \frac{V}{C} \right)$$

Au point « b », à l'endroit du but, pour lequel : $x' = 0$

5.3.3 Onde se propageant selon ox ; trajet retour

Dans le repère but :

$$\phi(t',0) = 2\pi f' t'$$

$$W = -C$$

$$\phi(t',x') = 2\pi f' \left(t' + \frac{x'}{C} \right)$$

Soit en retournant dans le repère radar :

$$x' = \Gamma (x - Vt)$$

$$t' = \Gamma \left(t - \frac{V}{C^2} x \right)$$

$$\phi(t,x) = 2\pi f' \Gamma \left(t - \frac{V}{C^2} x + \frac{x - Vt}{C} \right)$$

$$\phi(t,x) = 2\pi f' \Gamma \left(1 - \frac{V}{C} \right) t + \frac{x}{C}$$

$$\phi(t,0) = 2\pi f' \Gamma \left(1 - \frac{V}{C} \right)^2 t$$

$$f'' = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi}{dt} = f' \Gamma \left(1 - \frac{V}{C} \right)^2$$

On constate que le phénomène est réciproque :

$$\frac{f'}{f} = \frac{f''}{f'} = \Gamma \left(1 - \frac{V}{C} \right)$$

Par ailleurs, en remplaçant Γ par sa valeurs, on écrira :

$$\Gamma^2 = \left(1 - \frac{V^2}{C^2}\right)^{-1}$$

$$f'' = f \cdot \left(1 - \frac{V}{C}\right) \left(1 - \frac{V^2}{C^2}\right)^{-1}$$

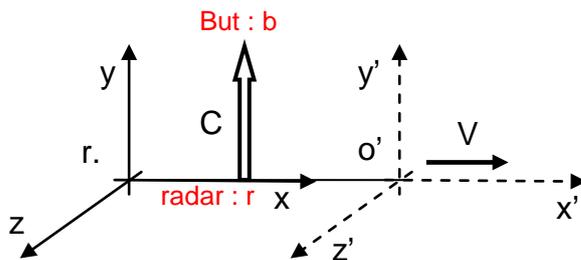
Cette relation est à rapprocher de celle issue de la théorie non relativiste, car pour $V \ll C$, en se limitant au premier ordre, on retrouve bien :

$$f'' = f \cdot \left(1 - \frac{2V}{C}\right) = f \cdot \left(1 + \frac{2V_R}{C}\right)$$

en posant $V_R = -V$, selon les conventions de signe usuelles en radar ($V_R =$ vitesse de rapprochement du but).

5.3.4 Onde se propageant perpendiculairement à ox, effet doppler transversal

Soit une onde se propageant selon oy.
Pour un observateur lié au radar :



$$\phi(t, y) = 2\pi f \left(t - \frac{y}{C}\right)$$

$$y = y'$$

$$t = \Gamma \left(t' + \frac{V}{C^2} x'\right)$$

Ce qui permet d'écrire pour le trajet aller de l'onde :

$$\phi(t', x', y') = 2\pi f \cdot \Gamma \left(t' + \frac{V}{C^2} x' - \frac{1}{\Gamma C} y'\right)$$

$$f' = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi}{dt'} = f \cdot \Gamma = f \left(1 - \frac{V^2}{C^2}\right)^{-1/2}$$

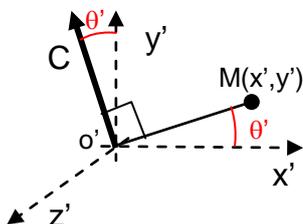
Le phénomène étant réciproque, on écrira pour le trajet retour :

$$f'' = f' \cdot \Gamma = f \left(1 - \frac{V^2}{C^2}\right)^{-1/2}$$

Ce qui se résume pour le trajet aller et retour en :

$$f'' = f \left(1 - \frac{V^2}{C^2}\right)^{-1}$$

Ce qui se traduit par une augmentation de la fréquence du signal perçu qui peut apparaître dans le cas des radars à antennes latérales traité au chapitre 22. On constate en outre que , dans le repère $o'x'y'z'$, l'onde ne se propage plus selon $o'y'$ mais fait avec cet axe un angle θ' tel que l'on puisse écrire à un instant donné t'_0 , dans le plan contenant l'origine O' et un point $M(x', y')$:



$$\phi(t'_0, x', y') = \text{Cte} \Rightarrow \frac{V}{C^2} x' - \frac{1}{\Gamma C} y' = 0$$

$$\tan(\theta') = \frac{y'}{x'} = \frac{\Gamma V}{C}$$

Phénomène connu sous le nom « d'aberration des ondes » liée aux mouvements transversaux.