

# CHAPITRE 18

## PERFORMANCES OPTIMALES DES RECEPTEURS

### Fonction d'ambiguïté, pouvoir séparateur, précision

1	FONCTION D'AMBIGUITE .....	2
1.1	APPROCHE PHYSIQUE.....	2
1.1.1	Première approche de la fonction d'ambiguïté.....	2
1.1.2	Seconde approche de la fonction d'ambiguïté .....	3
1.1.3	Equivalence des deux définitions .....	4
1.2	PROPRIETES DE LA FONCTION D'AMBIGUITE.....	4
1.2.1	Interprétation physique.....	4
1.2.2	Comportement à fréquence doppler nulle .....	5
1.2.3	Comportement à retard nul.....	5
1.2.4	Autres propriétés .....	6
1.2.5	Exemples de fonction d'ambiguïté.....	6
2	POUVOIR SEPARATEUR EN DISTANCE ET DOPPLER.....	7
2.1	POSITION DU PROBLEME.....	7
2.2	CIBLES DE SURFACES EQUIVALENTES EGALES .....	7
2.2.1	Pouvoir discriminateur en distance .....	7
2.2.2	Estimation de $\delta\tau$ .....	7
2.2.3	Pouvoir discriminateur en fréquence.....	9
2.2.4	Retour sur le diagramme d'ambiguïté.....	10
2.3	CIBLES DE SURFACES EQUIVALENTES DIFFERENTES.....	10
3	PRECISION OPTIMALE DES MESURES .....	11
3.1	ANALYSE DES SIGNAUX EN PRESENCE .....	11
3.2	MESURE DE LA DISTANCE.....	12
3.2.1	Dérivée du terme utile .....	12
3.2.2	Etude du terme parasite .....	12
3.2.3	Synthèse .....	13
3.3	MESURE DE LA FREQUENCE DOPPLER.....	14
3.4	PRECISION DES MESURES ANGULAIRES.....	15
4	EXEMPLES DE FONCTION D'AMBUIGUITE .....	16
4.1	IMPULSION GAUSSIENNE NON MODULEE EN FREQUENCE .....	17
4.2	IMPULSION RECTANGULAIRE DE DUREE « T ».....	18
4.3	IMPULSION D'AMPLITUDE PONDEREE PAR UNE LOI EN "COSINUS", .....	19
4.4	IMPULSION D'AMPLITUDE PONDEREE PAR UNE LOI DE HAMMING.....	20
4.5	IMPULSION D'AMPLITUDE "GAUSSIENNE" MODULEE LINEAIREMENT EN FREQUENCE.....	21
4.6	IMPULSION RECTANGULAIRE MODULEE LINEAIREMENT EN FREQUENCE ....	22
4.7	IMPULSION D'AMPLITUDE « EN COSINUS », MODULE LINEAIREMENT EN FREQUENCE.....	23
4.8	IMPULSION D'AMPLITUDE « DE HAMMING », MODULEE LINEAIREMENT EN FREQUENCE.....	24
4.9	CODE DE BARKER A 13 MOMENTS .....	25
4.10	CODE DE FRANK A 16 MOMENTS.....	26
4.11	TRAIN DE QUATRE IMPULSIONS, TRAITEMENT DOPPLER .....	27
4.12	TRAIN DE HUIT IMPULSIONS, TRAITEMENT DOPPLER.....	28

# 1 FONCTION D'AMBIGUITE

## 1.1 APPROCHE PHYSIQUE

Nous considèrerons le récepteur optimal sous ses deux formes : corrélateur et filtre adapté et examinerons son comportement à la fin du traitement cohérent, soit en amont du détecteur quadratique :

### 1.1.1 Première approche de la fonction d'ambiguïté

Si le récepteur est un **corrélateur**, un signal issu d'une cible quelconque (retard  $\tau$  fréquence doppler  $F$ ), en absence de bruit sera de la forme :

$$s(\tau, F) = Z(t - \tau) \cdot \exp\{j2\pi Ft\}$$

La réplique à réaliser pour traiter ce signal de manière optimale est :

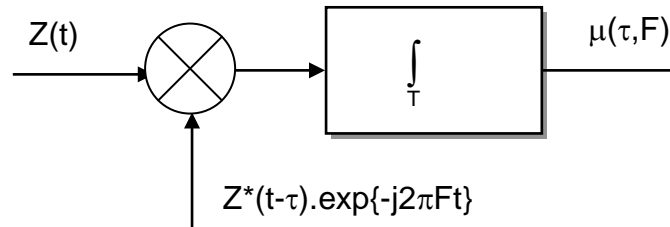
$$r(\tau, F) = Z^*(t - \tau) \cdot \exp\{-j2\pi Ft\}$$

$\tau$  et  $F$ , écarts entre la position de ce signal et celle du signal de référence :

$$s(0, 0) = Z(t).$$

définissent donc une « voie de réception » du corrélateur.

Examinons le signal issu de cette « voie de réception » lorsque le corrélateur est attaqué par le signal de référence  $Z(t)$  :



$$\mu(\tau, F) = \int_T Z(t) \cdot Z^*(t - \tau) \exp\{-j2\pi Ft\} \cdot dt$$

On remarque que :

$$\mu(0, 0) = \int_T Z(t) \cdot Z^*(t) \cdot dt = E_v$$

Energie du signal  $Z(t)$ . Et on définit la fonction unitaire, dite **fonction d'ambiguïté** :

$$A(\tau, F) = \frac{\mu(\tau, F)}{E_v} = \frac{1}{E_v} \int_T Z(t) \cdot Z^*(t - \tau) \exp\{-j2\pi Ft\} \cdot dt$$

Cette fonction est représentative du comportement de l'ensemble des voies du corrélateur, attaquées par le signal de référence.

En d'autres termes, **elle est représentative du signal parasite produit par un signal, dans les voies du corrélateur pour lesquelles il n'est pas adapté.**

Par ailleurs on peut associer à  $Z(t)$  (cf. chapitre 16 § 1.4.3), un signal d'énergie unitaire :

$$a(t) = Z(t) / \sqrt{E_v} \Rightarrow \int |a(t)|^2 dt = 1$$

Et écrire l'expression générale de la fonction d'ambiguïté :

$$A(\tau, F) = \frac{1}{E_V} \int_{\tau} Z(t) \cdot Z^*(t - \tau) \exp\{-j2\pi Ft\} \cdot dt$$

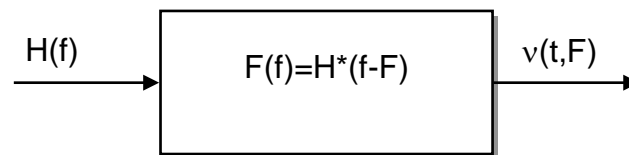
$$A(\tau, F) = \int_{\tau} a(t) \cdot a^*(t - \tau) \exp\{-j2\pi Ft\} \cdot dt$$

### 1.1.2 Seconde approche de la fonction d'ambiguïté

Si le récepteur est un filtre adapté,  $H(f)$  étant le spectre du signal de référence et  $F$  la fréquence doppler relative d'un signal quelconque, la transmittance du filtre adapté à ce signal quelconque sera:

$$F(f) = H^*(f - F)$$

D'où la réponse temporelle du filtre adapté à un signal quelconque lorsqu'il est attaqué par le signal de référence de spectre  $H(f)$ :



$$v(t, F) = \int_{\Delta F} H(f) \cdot H^*(f - F) \exp\{j2\pi ft\} \cdot df$$

On remarque que :

$$v(0, 0) = \int_{\tau} H(f) \cdot H^*(f) \cdot df = E_V$$

Et on définit une seconde forme de la **fonction d'ambiguïté** :

$$\Lambda(t, F) = \frac{v(t, F)}{E_V} = \frac{1}{E_V} \int_{\Delta F} H(f) \cdot H^*(f - F) \exp\{j2\pi ft\} \cdot df$$

Par ailleurs :

- on peut associer à  $H(f)$  (cf. chapitre 16 § 1.4.3), le spectre d'un signal d'énergie unitaire :

$$h(f) = H(f) / \sqrt{E_V} \Rightarrow \int |h(f)|^2 \cdot df = 1$$

- On peut se placer à l'instant  $t = \tau$ , retard présumé du signal quelconque, pour aboutir à la forme générale :

$$\Lambda(\tau, F) = \frac{1}{E_V} \int_{\Delta F} H(f) \cdot H^*(f - F) \exp\{j2\pi f\tau\} \cdot df$$

$$\Lambda(\tau, F) = \int_{\Delta F} h(f) \cdot h^*(f - F) \exp\{j2\pi f\tau\} \cdot df$$

### 1.1.3 Equivalence des deux définitions

Le théorème de Parseval (cf. chapitre 16 § 2.3.1) permet d'écrire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y^*(t) \cdot dt = \int_{-\infty}^{+\infty} H_x(f) \cdot H_y^*(f) \cdot df$$

Posons :

$$\begin{aligned} x(t) &= Z(t) ; \text{ soit : } H_x(f) = H(f) \\ y(t) &= Z(t - \tau) \cdot \exp\{j2\pi F\tau\} \end{aligned}$$

Dont le spectre s'écrit, en utilisant les résultats du chapitre 16 § 1.5 :

$$H_y(f) = H(f-F) \cdot \exp\{-j2\pi(f-F)\tau\}$$

On écrira donc :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y^*(t) \cdot dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} z(t) \cdot z^*(t - \tau) \cdot \exp\{-j2\pi Ft\} \cdot dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} H_x(f) \cdot H_y^*(f) \cdot df = \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) \cdot H^*(f - F) \cdot \exp\{j2\pi(f - F)\tau\} \cdot df \\ &= \exp\{-j2\pi F\tau\} \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) \cdot H^*(f - F) \cdot \exp\{j2\pi f\tau\} \cdot df \end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} z(t) \cdot z^*(t - \tau) \cdot \exp\{-j2\pi Ft\} \cdot dt = \exp\{-j2\pi F\tau\} \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) \cdot H^*(f - F) \cdot \exp\{j2\pi f\tau\} \cdot df$$

Soit :

$$\boxed{|A(\tau, F)| = |\Lambda(\tau, F)|}$$

#### NOTA:

Les définitions précédentes ne prétendent pas à la rigueur absolue quant aux signes du temps et de la fréquence, d'où de légères différences possibles avec d'autres formulations de la fonction d'ambiguïté, sans conséquence pour ce qui va suivre.

## 1.2 PROPRIETES DE LA FONCTION D'AMBIGUITE

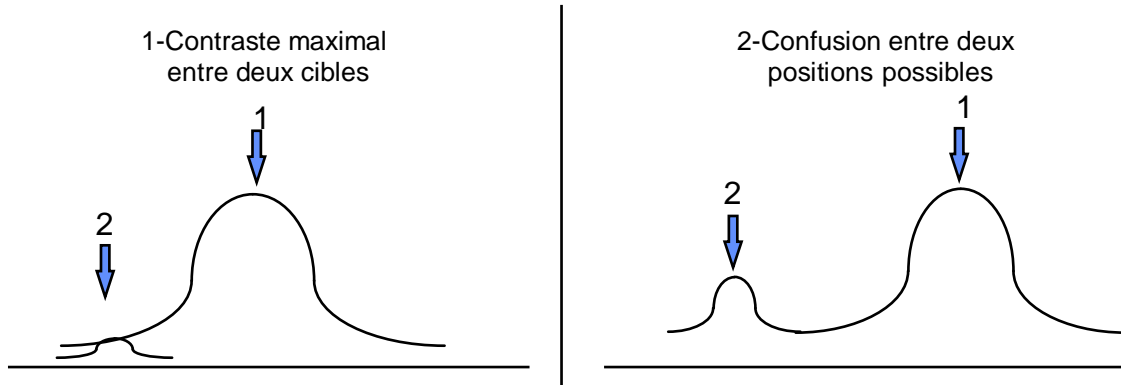
### 1.2.1 Interprétation physique

La fonction d'ambiguïté  $A(\tau, F)$  est représentative du rapport des puissances entre les signaux issus du récepteur optimal, dans la voie adaptée au signal traité (pris comme de référence):  $A(0,0) = 1$  et dans une voie adaptée à un signal quelconque de position  $\theta = (\tau, F)$ , pour laquelle le signal de position  $[0,0]$  peut être considéré comme un signal parasite.

Elle est donc représentative du **contraste maximal des surfaces équivalentes de deux cibles**, au delà duquel une cible « parasite » de grande taille masque une petite cible utile.

Par ailleurs, cette fonction d'ambiguïté peut présenter plusieurs maxima qui, en présence de bruit notamment, peuvent être pris pour des maxima absolus ; cette confusion correspond bien à une ambiguïté : **confusion entre deux valeurs distinctes de la position 0 d'une cible**.

La figure suivante illustre ces deux propriétés :



On notera enfin, que la fonction d'ambiguïté obtenue en pratique dépend de la structure du récepteur, qui peut apporter une certaine quantification de  $\tau$  (cellules distantes) et de  $F$  (cellules doppler).

### 1.2.2 Comportement à fréquence doppler nulle

$A(\tau,0)$  est, à un coefficient près, la représentation du **déroulement au cours du temps du signal à la sortie du filtre adapté.**

C'est aussi la fonction de corrélation temporelle du signal traité :

$$|A(\tau,0)| = \left| \frac{1}{E_v} \int Z(t) \cdot Z^*(t-\tau) \cdot dt \right| = \left| \frac{1}{E_v} \int |H(f)|^2 e^{j2\pi f\tau} df \right|$$

$$|A(\tau,0)| = \left| \int a(t) \cdot a^*(t-\tau) \cdot dt \right| = \left| \int |h(f)|^2 \exp\{j2\pi f\tau\} \cdot df \right|$$

**Elle ne dépend que du carré du module du spectre du signal traité, dont elle est la transformée inverse de Fourier.**

### 1.2.3 Comportement à retard nul

$A(0,F)$  représente la **répartition spectrale du signal à l'issue du traitement optimal**, elle est représentative de pouvoir séparateur en fréquence de radar.

C'est aussi la fonction de corrélation spectrale du signal traité:

$$|A(0,F)| = \left| \frac{1}{E_v} \int |Z(t)|^2 \exp\{-j2\pi Ft\} \cdot dt \right| = \left| \frac{1}{E_v} \int H(f) \cdot H^*(f-F) \cdot df \right|$$

$$|A(0,F)| = \left| \int |a(t)|^2 \exp\{-j2\pi Ft\} \cdot dt \right| = \left| \int h(f) \cdot h^*(f-F) \cdot df \right|$$

**Elle ne dépend que du carré du module du signal traité, dont elle est la transformée de Fourier.**

### 1.2.4 Autres propriétés

La fonction d'ambiguïté d'un signal,  $|A(\tau, F)|$  est symétrique par rapport au point [0,0]

$$|A(\tau, F)| = |A(-\tau, -F)|$$

$$|A(\tau, -F)| = |A(-\tau, F)|$$

On peut toujours écrire par définition :

$$A(0,0) = 1$$

$$|A(\tau, F)| \leq 1$$

Par ailleurs on peut calculer :

$$\iint |A(\tau, F)|^2 \cdot d\tau \cdot dF$$

en remarquant que:

$$A(\tau, F) = \int a(t) \cdot a^*(t - \tau) \cdot e^{-j2\pi Ft} dt$$

est la transformée de Fourier du produit :  $a(t) a^*(t - \tau)$ . Donc en appliquant la relation de Parseval on peut écrire:

$$\int |A(\tau, F)|^2 dF = \int |a(t) \cdot a(t - \tau)|^2 dt$$

$$\iint |A(\tau, F)|^2 dF d\tau = \iint |a(t) \cdot a(t - \tau)|^2 dt d\tau$$

$$\iint |A(\tau, F)|^2 dF d\tau = \int |a(t)|^2 dt \cdot \int |a(t - \tau)|^2 d\tau$$

Par définition :

$$\int |a(t)|^2 dt = 1$$

Et également , en posant  $u = t - \tau$

$$\int |a(t - \tau)|^2 d\tau = \int |a(u)|^2 du = 1$$

Donc :

$$\iint |A(\tau, F)|^2 \cdot d\tau \cdot dF = 1$$

Ce dernier résultat, lié à la propriété :

$$A(0,0) = 1$$

montre que l'on ne peut améliorer la fonction d'ambiguïté d'un signal dans une zone quelconque du plan  $(\tau, F)$  sans la détériorer ailleurs.

### 1.2.5 Exemples de fonction d'ambiguïté

Ces propriétés sont illustrées par les exemples de fonctions d'ambiguïté présentés à la fin de ce chapitre.

## 2 POUVOIR SEPARATEUR EN DISTANCE ET DOPPLER

### 2.1 POSITION DU PROBLEME

Considérons le comportement du récepteur devant une cible isolée. On définit intuitivement la position estimée  $[\tau, F]$  de la cible, comme celle pour laquelle l'amplitude du signal traité passe par un maximum. En d'autres termes, c'est celle qui maximise la fonction d'ambiguïté.

Ce critère appliqué à deux cibles entraîne donc la recherche de deux maxima sur une fonction complexe, somme des deux fonctions d'ambiguïté attachées aux deux cibles.

Plusieurs cas sont à considérer, selon que les signaux issus des deux cibles sont d'amplitudes comparables ou inégales.

### 2.2 CIBLES DE SURFACES EQUIVALENTES EGALES

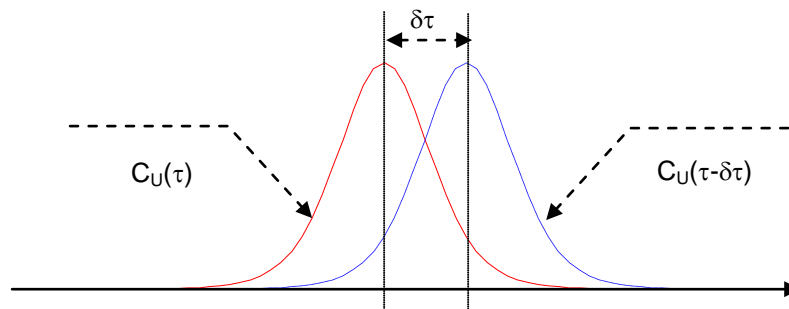
#### 2.2.1 Pouvoir discriminateur en distance

On s'intéresse à la fonction :

$$c_u(\tau) = A(\tau, 0) = \int a(t)a(t - \tau)dt = \int |h(f)|^2 e^{2j\pi f\tau} df$$

Si deux cibles de même surface équivalentes sont distantes de  $\delta\tau$ , la fonction d'ambiguïté globale s'écrira :

$$c_2(\tau) = c_u(\tau) + c_u(\tau - \delta\tau)$$



Ces deux fonctions étant complexes, il convient de **trouver une condition pour que leur somme présente deux maxima, quelle que soit leur phase relative.**

Cette condition générale impose que cela doit rester vrai pour des signaux de même phase et donc que la somme :

$$|c_u(\tau)| + |c_u(\tau - \delta\tau)|$$

doit présenter deux maxima.

D'où, si  $\delta\tau$  est le pouvoir séparateur en distance pour lequel cette condition est juste vérifiée :

$$\boxed{|c_u(\delta\tau/2)| \leq 1/2}$$

#### 2.2.2 Estimation de $\delta\tau$

$c_u(\tau)$  est généralement une courbe « en cloche » qui présente un maximum égal à 1 pour  $\tau = 0$ . Une approximation raisonnable est de chercher une loi de Gauss auscultatrice à  $c_u(\tau)$ .

Cette loi aura pour expression :

$$\hat{c}_u(\tau) = \exp\left\{\frac{-\tau^2}{2v^2}\right\}$$

Elle est entièrement définie par sa variance  $v^2$  en particulier :

$$\frac{d^2\hat{c}_u(\tau)}{d\tau^2} = -\frac{1}{v^2} \exp\left\{\frac{-\tau^2}{2v^2}\right\} + \frac{\tau^2}{v^4} \exp\left\{\frac{-\tau^2}{2v^2}\right\}$$

Soit pour un développement autour de  $\tau = 0$  :

$$\frac{d^2\hat{c}_u(0)}{d\tau^2} = -\frac{1}{v^2}$$

Cette valeur peut être rattachée à la fonction observée. En effet on connaît :

$$c_u(\tau) = \int |h(f)|^2 e^{j2\pi f\tau} df$$

Expression dont la dérivée seconde est :

$$\frac{d^2c_u}{d\tau^2} = -4\pi^2 \int f^2 |h(f)|^2 e^{j2\pi f\tau} df$$

soit pour  $\tau = 0$  et en se référant à la définition de la dispersion en fréquence du chapitre 16, paragraphe 1.4.d :

$$\frac{d^2c_u(0)}{d\tau^2} = -4\pi^2 \int f^2 |h(f)|^2 df$$

$$\frac{d^2c_u(0)}{d\tau^2} = -4\pi^2 \sigma_f^2$$

Il en résulte que :

$$\frac{1}{v^2} \approx 4\pi^2 \sigma_f^2$$

Et que l'on peut approximer la fonction  $c_u(\tau)$  par une loi exponentielle de la forme :

$$\hat{c}_u(\tau) = \exp\left\{-2\pi^2 \sigma_f^2 \tau^2\right\}$$

La valeur  $C_u(\delta\tau/2) = 1/2$  est atteinte pour :

$$1/2 = \exp\left\{-2\pi^2 \sigma_f^2 (\delta\tau/2)^2\right\}$$

$$0.7 = 2\pi^2 \sigma_f^2 (\delta\tau/2)^2 \Rightarrow \delta\tau^2 = \frac{1.4}{\pi^2 \sigma_f^2}$$

$$\delta\tau = \frac{\sqrt{1.4}}{\pi \cdot \sigma_f}$$



On a établi au chapitre 16, paragraphe 1.4.3 que, pour une loi gaussienne (§ d), on peut exprimer  $\sigma_f$  en fonction de la bande passante équivalente du signal  $\Delta F$  par la relation :

$$\sigma_f = \Delta F / \sqrt{2\pi}$$

Il en résulte que:

$$\delta\tau = \frac{\sqrt{1.4}}{\pi \cdot \sigma_f} = \frac{\sqrt{2.8\pi}}{\pi \Delta F} = \frac{0.95}{\Delta F}$$

Ceci permet d'écrire dans **le cas pratique des signaux et spectres en cloche**

$$\delta\tau \approx \frac{1}{\Delta F}$$

relation valable à 10 % près.

### 2.2.3 Pouvoir discriminateur en fréquence

La fonction à prendre en considération est alors :

$$c_u(F) = \int |a(t)|^2 e^{-2j\pi Ft} dt = \int h(f) \cdot h^*(f - F) \cdot df$$

Elle amène à définir un pouvoir discriminateur en fréquence  $\delta f$  tel que:

$$|c_u(\delta f/2)| \leq 1/2$$

La symétrie des expressions  $C_u(\tau)$  et  $C_u(F)$  permet alors d'écrire **dans le cas pratique des signaux et spectres en cloche** :

- la loi ausculatrice et sa dérivée seconde :

$$\hat{c}_u(F) = \exp\left\{-\frac{F^2}{2v^2}\right\}$$

$$\frac{d^2 \hat{c}_u(0)}{dF^2} = -\frac{1}{v^2}$$

- la dérivée seconde de  $C_u(F)$  autour de  $F = 0$  :

$$\frac{d^2 c_u(0)}{dF^2} = -4\pi^2 \int t^2 |a(t)|^2 dt$$

$$\frac{d^2 c_u(0)}{dF^2} = -4\pi^2 \sigma_t^2$$

- l'expression finale de la loi ausculatrice :

$$\hat{c}_u(F) = \exp\left\{-2 \cdot \pi^2 \sigma_t^2 \cdot F^2\right\}$$

- le pouvoir séparateur en fréquence doppler :

$$\delta F = \frac{\sqrt{1.4}}{\pi \cdot \sigma_t}$$

- ou encore en se rapportant à la durée  $\Delta T$  du signal :

$$\delta F \approx \frac{1}{\Delta T}$$

### 2.2.4 Retour sur le diagramme d'ambiguïté

Le diagramme d'ambiguïté d'un signal est une représentation plane des zones dans lesquelles deux cibles ne peuvent pas être séparées, soient des zones intérieures aux pouvoirs séparateurs en distance (ou temps) et en vitesse (ou fréquence), selon le chapitre 17 § 1.3.4, assorties éventuellement des ambiguïtés :

- axe d'ambiguïté selon le chapitre 17 § 5.8 ;
- répétition des ambiguïtés pour les radars périodiques selon le chapitre 17 § 3.5.

C'est donc, en généralisant les propriétés précédentes amenant à la définition du pouvoir séparateur, la représentation des zones dans lesquelles :

$$|A(\tau, F)| > \frac{1}{2}$$

dans le plan  $[\tau, F]$ . Cette définition simple permet un calcul direct des fonctions d'ambiguïté.

## 2.3 CIBLES DE SURFACES EQUIVALENTES DIFFERENTES

Si les surfaces équivalentes des cibles sont très différentes, seule l'analyse de la fonction d'ambiguïté permet de savoir si elles sont séparables. Deux optiques peuvent être considérées.

Aucun traitement spécial n'est fait après réception. Dans ce cas une cible peut être masquée par une autre dès que le **rapport de leurs surfaces équivalentes devient supérieur à  $|A(\tau, F)|^2$** .

Une analyse complète de la fonction d'ambiguïté est faite. Dans ce cas très théorique, rien ne s'oppose plus à la séparation des deux échos, dans la mesure où le traitement permet de reconstituer les deux fonctions d'ambiguïté initiales à condition de ne pas être gêné par le bruit superposé aux deux signaux.

On pourrait par exemple, si on sait modéliser l'une des deux cibles (fréquence Doppler, spectre propre, fluctuation... ) avec un nombre réduit de paramètres, analyser la fonction d'ambiguïté globale pour évaluer avec précision la position spatio-temporelle de cette cible (position et phase), puis cet apprentissage du milieu terminé, « retrancher » de la fonction globale ce qui a été estimé comme lui appartenant pour faire apparaître une autre cible éventuelle.

On notera que de cette manière, on utilise toutes les possibilités « fines » du récepteur :

- mesure de  $\tau$  et de  $F$  afin de situer la cible ;
- estimation de l'amplitude complexe du signal vu par le radar, pour restituer au plus près sa fonction d'ambiguïté.

On arrive ainsi à la notion d'un pouvoir séparateur dépendant des moyens d'analyse dont on dispose pour traiter le signal reçu, lesquels peuvent être considérablement renforcés par des connaissances a priori (nombre de cibles, paramètres de la fonction d'ambiguïté de chacune d'elles...).

Le problème consistera alors à travailler sur un modèle réaliste. Le résultat dépendra aussi du rapport signal sur bruit.

Les radars « ordinaires » ne sont pas, hélas, conçus pour réaliser cette analyse fine et répondent pratiquement tous au premier cas.

Néanmoins certaines études (*reconnaissance des formes, antennes à pouvoir séparateur élevé*) basées sur des principes voisins permettent d'obtenir des pouvoirs discriminatoires très élevés, dans la mesure où le milieu analysé correspond au modèle théorique choisi.

### 3 PRECISION OPTIMALE DES MESURES

#### 3.1 ANALYSE DES SIGNAUX EN PRESENCE

A l'entrée du récepteur, le signal à traiter est composé du signal utile et du bruit qui l'accompagne. On peut donc écrire,  $\alpha$  et  $\beta$  étant (cf. chapitre 16 § 3.7) les deux composantes du bruit :

$$Z_c(t) = Z(t) + \alpha(t) + j\beta(t)$$

D'où en présence de bruit, le signal de sortie normalisé :

$$A_c(\tau, F) = \frac{1}{E_v} \int [Z(t) + \alpha(t) + j\beta(t)] Z^*(t - \tau) e^{-j2\pi Ft} dt$$

Soit en se plaçant à l'endroit  $\tau = 0$  et  $F = 0$  et en se souvenant que :

$$a(t) = Z(t) / \sqrt{E_v} \Rightarrow \int |a(t)|^2 dt = 1$$

$$A_c(0,0) = \int \left( a(t) + \frac{\alpha(t)}{\sqrt{E_v}} \right) a^*(t) dt + j \int \frac{\beta(t)}{\sqrt{E_v}} a^*(t) dt = X + jY$$

En absence de bruit  $A(0,0) = 1$ .

Le rapport signal sur bruit à la sortie du traitement adapté est  $S/B = E/b$  sous porteuse, soit (cf. chapitre 16 § 4.4) :  $(S/B)_v = E_v/2b$  en vidéo.

Donc, à un signal vidéo d'énergie unitaire, correspond en sortie du traitement un bruit de puissance (variance) :  $B_v = 2b/E_v$ , porté également par les deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$ .

On en conclut que :

- $X$  suit une loi de Gauss portée par le signal de moyenne = 1 et de variance =  $b/E_v$
- $Y$  suit une loi de Gauss de moyenne = 0 et de variance =  $b/E_v$

On vérifie facilement que, si :  $E_v / b \gg 4$  :  $Y$  est négligeable. On pourra donc retenir que, **dès que le signal sur bruit devient élevé, c'est la composante du bruit en phase avec le signal utile qui définit la variance du signal issu du récepteur.** Et on pourra écrire dans ce cas :

$$A_c(\tau, F) \approx \frac{1}{E_v} \int \left[ a(t) + \frac{\alpha(t)}{\sqrt{E_v}} \right] a^*(t - \tau) e^{-j2\pi Ft} dt$$

### 3.2 MESURE DE LA DISTANCE

En se plaçant aux fréquences doppler nulles l'expression précédente devient :

$$A_c(\tau, 0) = c(\tau) = \int \left( a(t) + \frac{\alpha(t)}{\sqrt{E_v}} \right) \cdot a^*(t - \tau) dt$$

On définit la **position estimée  $\tau$  de la cible**, comme celle pour laquelle **l'amplitude du signal traité passe par un maximum** soit :

$$\frac{dc(\tau)}{d\tau} = 0$$

Ce qui implique un analyse fine de la fonction  $c(\tau)$ , laquelle peut être décomposée en deux termes :

- Un terme utile :

$$c_u(\tau) = \int a(t) a^*(t - \tau) dt$$

- Un terme parasite :

$$c_p(\tau) = \int \frac{\alpha(t)}{\sqrt{E_v}} \cdot a^*(t - \tau) dt$$

#### 3.2.1 Dérivée du terme utile

C'est la fonction déjà rencontrée aux paragraphes 2.2.1 et 2.2.2, qui admet comme courbe ausculatrice :

$$\hat{c}_u(\tau) = \exp\left\{-2 \cdot \pi^2 \sigma_f^2 \tau^2\right\}$$

Où  $\sigma_f$  est la dispersion en fréquence du signal utile (chapitre 16, paragraphe 1.4.3).

On peut en calculer la dérivée:

$$\frac{d\hat{c}_u}{d\tau} = -4\pi^2 \sigma_f^2 \tau \cdot \exp\left\{-2\pi^2 \sigma_f^2 \tau^2\right\}$$

Soit, pour  $\tau$  voisin de zéro et en se limitant au premier ordre :

$$\boxed{\frac{dc_u}{d\tau} \approx -4\pi^2 \sigma_f^2 \tau}$$

#### 3.2.2 Etude du terme parasite

$\alpha(t)$  est une **variable aléatoire**, gaussienne, de valeur moyenne nulle, et de **variance** égale à la puissance du bruit  $B$  pris dans la bande  $\Delta F$  du signal, soit, si  $b$  est sa densité spectrale :

$$B = b \cdot \Delta F$$

Si  $\Delta F$  est la bande du signal, on peut considérer que celui ci est formé de  $n = T \cdot \Delta F$  échantillons indépendants pris tous les  $\delta t = 1/\Delta F$ .

Soit, en posant :  $t_i = i \cdot \delta t$ , une écriture de  $c_p(\tau)$  sous la forme :

$$c_p(\tau) = \int \frac{\alpha(t)}{\sqrt{E_v}} \cdot a^*(t-\tau) dt = \frac{1}{\Delta F \sqrt{E_v}} \sum_{i=1}^n \alpha(t_i) \cdot a^*(t_i - \tau)$$

dont la dérivée a pour expression :

$$\frac{dc_p}{d\tau} = \frac{-1}{\Delta F \sqrt{E_v}} \sum \alpha(t_i) a^*(t_i - \tau)$$

C'est une variable aléatoire, suivant une loi de Gauss car somme de variables gaussiennes, de valeur moyenne nulle et de variance :

$$\begin{aligned} \sigma_{c_p}^2 &= \frac{1}{(\Delta F)^2 E_v} \left( \sum \left| \alpha(t_i) a^*(t_i - \tau) \right| \right)^2 = \frac{1}{(\Delta F)^2 E_v} \sum \left| \alpha(t_i) a^*(t_i - \tau) \right|^2 \\ \sigma_{c_p}^2 &= \frac{1}{(\Delta F)^2 E_v} \sum \overline{\alpha(t_i)^2} \cdot \left| a^*(t_i - \tau) \right|^2 = \frac{B}{(\Delta F)^2 E_v} \sum \left| a^*(t_i - \tau) \right|^2 \\ \sigma_{c_p}^2 &= \frac{B}{\Delta F \cdot E_v} \int \left| a^*(t - \tau) \right|^2 dt \end{aligned}$$

$a(t)$  a pour transformée de Fourier  $h(f)$ , soit :

$$a(t) = \int h(f) \cdot e^{j2\pi ft} df$$

Et sa dérivée s'écrit :

$$a'(t) = \int j2\pi f \cdot h(f) \cdot e^{j2\pi ft} df$$

$a'(t)$  a donc comme transformée de Fourier  $j2\pi f \cdot h(f)$ , ce qui permet d'appliquer le théorème de Parseval et d'écrire :

$$\int \left| a^*(t - \tau) \right|^2 dt = 4\pi \cdot \int f^2 |h(f)|^2 df = 4\pi^2 \sigma_f^2$$

D'où l'expression de la variance du terme parasite :

$$\sigma_{c_p}^2 = \frac{b}{E_v} \cdot 4\pi^2 \sigma_f^2$$

Soit en se souvenant que  $E_v$ , énergie du signal vidéo, est égale à deux fois l'énergie du signal sous porteuse (cf. chapitre 16 § 4.4) :

$$\sigma_{c_p} = \sqrt{\frac{b}{2E}} \cdot 2\pi \cdot \sigma_f$$

### 3.2.3 Synthèse

La valeur estimée de la position du maximum de  $c(\tau)$  répond à la condition :

$$\frac{dc(\tau)}{d\tau} = \frac{dc_u(\tau)}{d\tau} + \frac{dc_p(\tau)}{d\tau} = 0$$

ou en simplifiant les notations :

$$c_u'(\tau) + c_p'(\tau) = 0$$

On connaît :  $c'_u(t) = -4\pi^2\sigma_f^2\tau$ , ce qui entraîne :

$$-4\pi^2\sigma_f^2\tau + c'_p = 0$$

soit :

$$\tau = \frac{c'_p}{4\pi^2\sigma_f^2}$$

C'est une variable aléatoire, comme  $c'_p(t)$ , de valeur moyenne nulle et de variance :

$$\sigma_\tau = \frac{\sigma_{c_p}}{4\pi^2\sigma_f^2} = \sqrt{\frac{b}{E_v}} \cdot 2\pi \cdot \sigma_f \cdot \frac{1}{4\pi^2\sigma_f^2} = \frac{1}{2\pi \cdot \sigma_f \sqrt{E_v/b}}$$

On écrira donc **en général** :

$$\sigma_\tau = \frac{1}{2\pi \cdot \sigma_f \sqrt{2 \cdot E/b}}$$

$\sigma_f$  dépend à la fois de la largeur et de la forme du spectre du signal, il est égal par exemple à  $\Delta F/2\sqrt{3}$  pour un spectre rectangulaire de largeur  $\Delta F$ .

**Dans le cas pratique des spectres en cloche** où l'on peut poser à **10 % près** :

$$\Delta F = \sigma_f \sqrt{2\pi}$$

l'expression précédente devient :

$$\sigma_\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \Delta F \sqrt{2 \cdot E/b}}$$

ou :

$$\sigma_\tau = \frac{1}{2,5 \cdot \Delta F \sqrt{2 \cdot E/b}}$$

Associé au pouvoir discriminateur en distance :

$$\delta\tau = \frac{1}{\Delta F}$$

### 3.3 MESURE DE LA FREQUENCE DOPPLER

Les résultats précédents peuvent être transposés aux mesures de fréquence. En raison de la symétrie des expressions :

$$|A(\tau, 0)| = \left| \int a(t) \cdot a^*(t-\tau) \cdot dt \right| = \left| \int |h(f)|^2 \cdot \exp\{j2\pi f\tau\} \cdot df \right|$$

$$|A(0, F)| = \left| \int |a(t)|^2 \cdot \exp\{-j2\pi Ft\} \cdot dt \right| = \left| \int h(f) \cdot h^*(f-F) \cdot df \right|$$

On écrira donc dans le **cas général** ( $\sigma_t$  : dispersion en temps du signal) :

$$\sigma_F = \frac{1}{2\pi \cdot \sigma_t \sqrt{2E/b}}$$

Et dans le cas pratique des signaux en cloche, à 10 % près :

$$\sigma_F = \frac{1}{2,5\Delta T \sqrt{2E/b}}$$

associé au pouvoir séparateur en fréquence doppler :

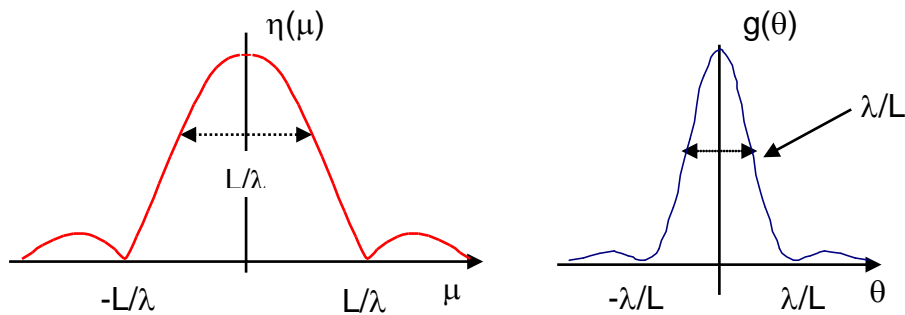
$$\delta F = \frac{1}{\Delta T}$$

### 3.4 PRECISION DES MESURES ANGULAIRES

On se souvient que le gain d'une ouverture plane de dimension L est une courbe (transformée de Fourier inverse de la loi d'éclairement de l'ouverture plane) ayant une ouverture utile :

$$\theta_0 = \delta\theta = \frac{\lambda}{L}$$

La figure suivante représente le gain en champ de l'aérien :  $g(\theta)$  et sa transformée de Fourier, la loi d'éclairement de l'aérien :  $\eta(\mu)$ .



Cette transformée de Fourier sera de la forme :

$$H(\mu) = \int g(\theta) e^{-j2\pi\theta\mu} d\theta$$

Expression à rapprocher de celle reliant le spectre et l'amplitude du signal :

$$H(f) = \int A(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$

D'où la transposition des résultats précédents à un signal dont la transformée de Fourier a pour largeur utile  $L/\lambda$ , à 10 % près :

$$\delta\theta = \frac{\lambda}{L} = \theta_0$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2,5 \cdot L/\lambda \cdot \sqrt{2E/b}}$$

$$\frac{\sigma_\theta}{\theta_0} = \frac{1}{2,5 \cdot \sqrt{2E/b}}$$

## 4 EXEMPLES DE FONCTION D'AMBIGUITE



## 4.1 IMPULSION GAUSSIENNE NON MODULEE EN FREQUENCE

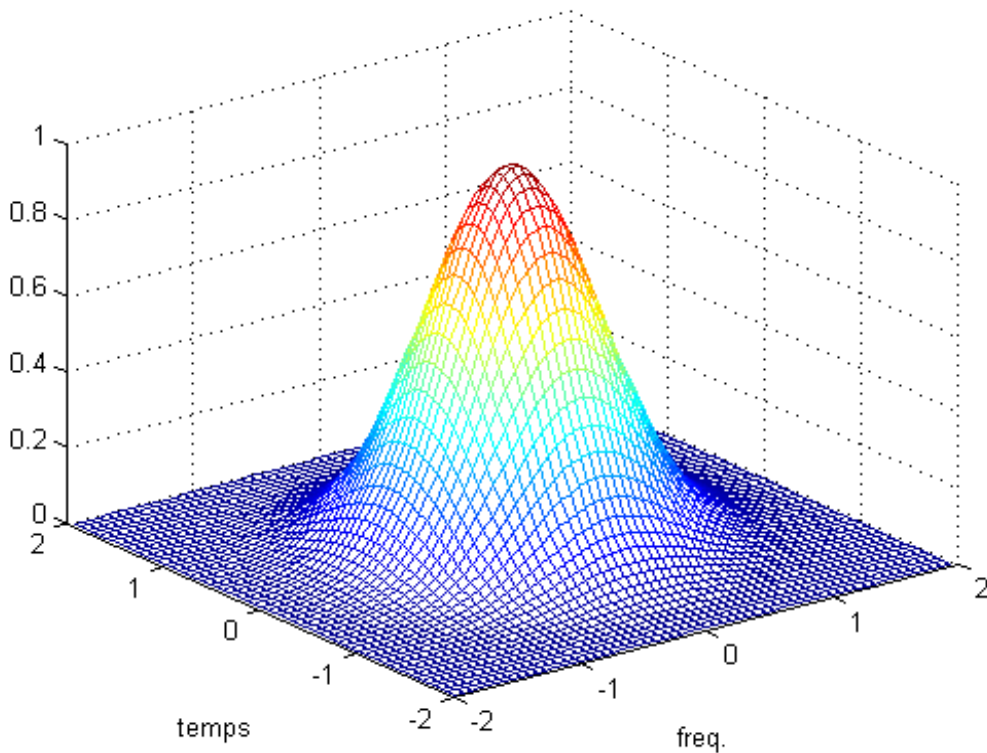
Pour ce signal, à un coefficient près, on a :

$$Z(t) = \exp\left\{-\frac{\pi t^2}{T_0^2}\right\} \Leftrightarrow \cdot H(f) = \exp\left\{-\frac{\pi f^2}{F_0^2}\right\}$$

$$T_0 \cdot F_0 = 1$$

Sa fonction d'ambiguïté s'écrit :

$$|A(\tau, F)| = \exp\left\{-\frac{\pi \tau^2}{2T_0^2}\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{\pi F^2}{2F_0^2}\right\}$$



Son allure est symétrique en fréquence et en temps et ses coupes à  $\tau = 0$  ou  $F = 0$  sont des courbes de Gauss.

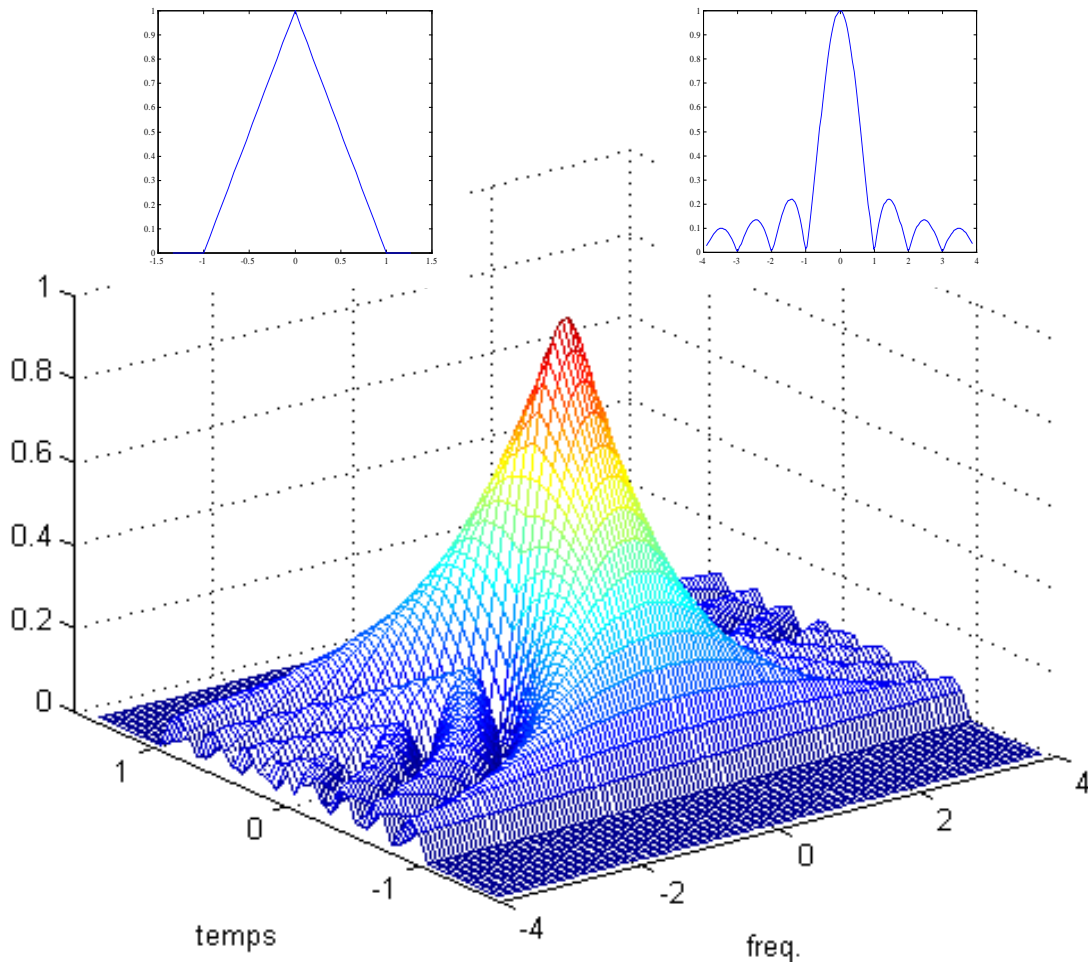
## 4.2 IMPULSION RECTANGULAIRE DE DUREE « T »

Soit une impulsion rectangulaire non modulée en fréquence , de durée T

Sa fonction d'ambiguïté a pour expression :

$$|A(\tau, F)| = \left| \frac{\sin(\pi \cdot F(T - |\tau|))}{\pi \cdot F(T - |\tau|)} \right| \cdot \left| \frac{T - |\tau|}{T} \right|$$

Les deux encadrés représentent ( de gauche à droite) les coupes de cette fonction d'ambiguïté à  $F = 0$  (évolution temporelle de la réponse du récepteur) et  $\tau = 0$  (évolution spectrale de la réponse du récepteur).

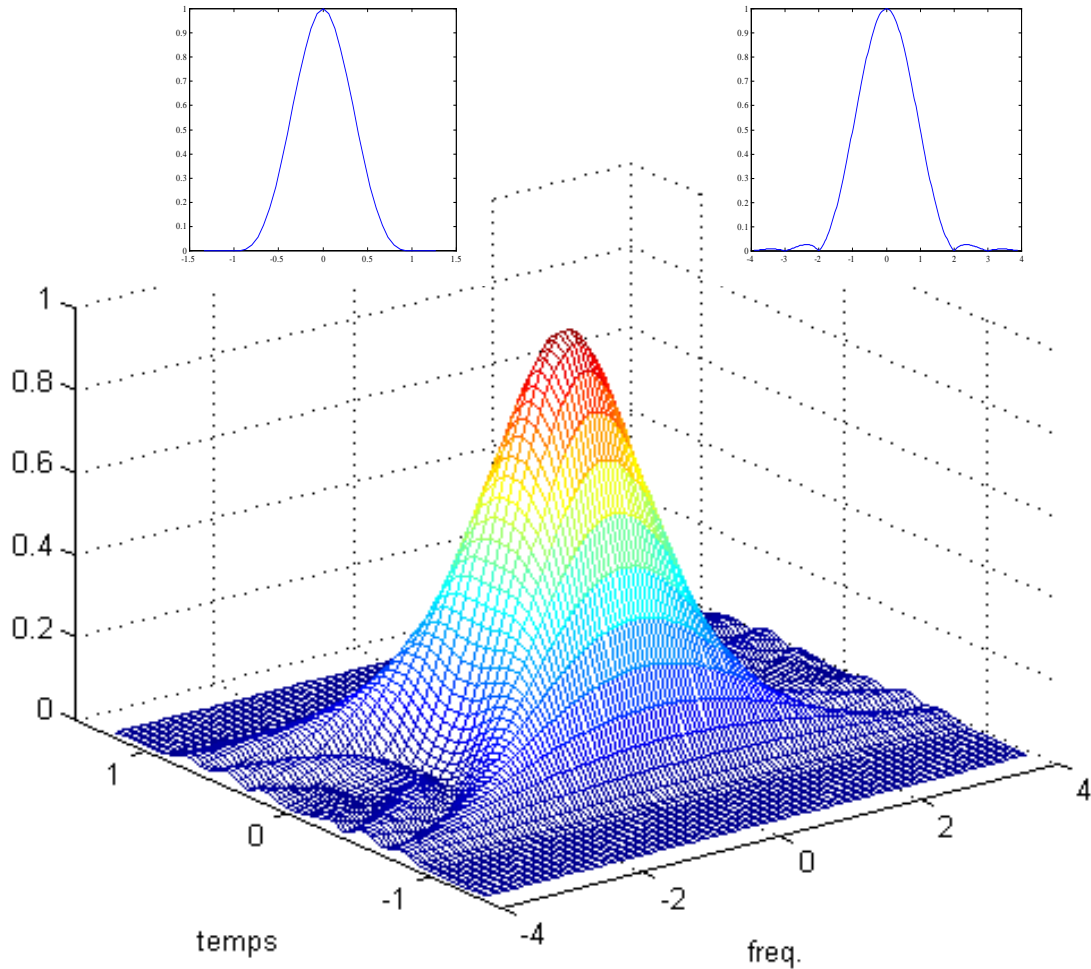


On retrouve bien les allures caractéristiques établies au chapitre 17.

### 4.3 IMPULSION D'AMPLITUDE PONDEREE PAR UNE LOI EN "COSINUS",

Soit une impulsion non modulée en fréquence, de durée T. On se place ici dans le cas d'une impulsion dont l'amplitude n'est pas constante, mais pondérée par une loi en cosinus.

Les deux encadrés représentent (de gauche à droite) les coupes de cette fonction d'ambiguïté à  $F = 0$  (évolution temporelle de la réponse du récepteur) et  $\tau = 0$  (évolution spectrale de la réponse du récepteur).

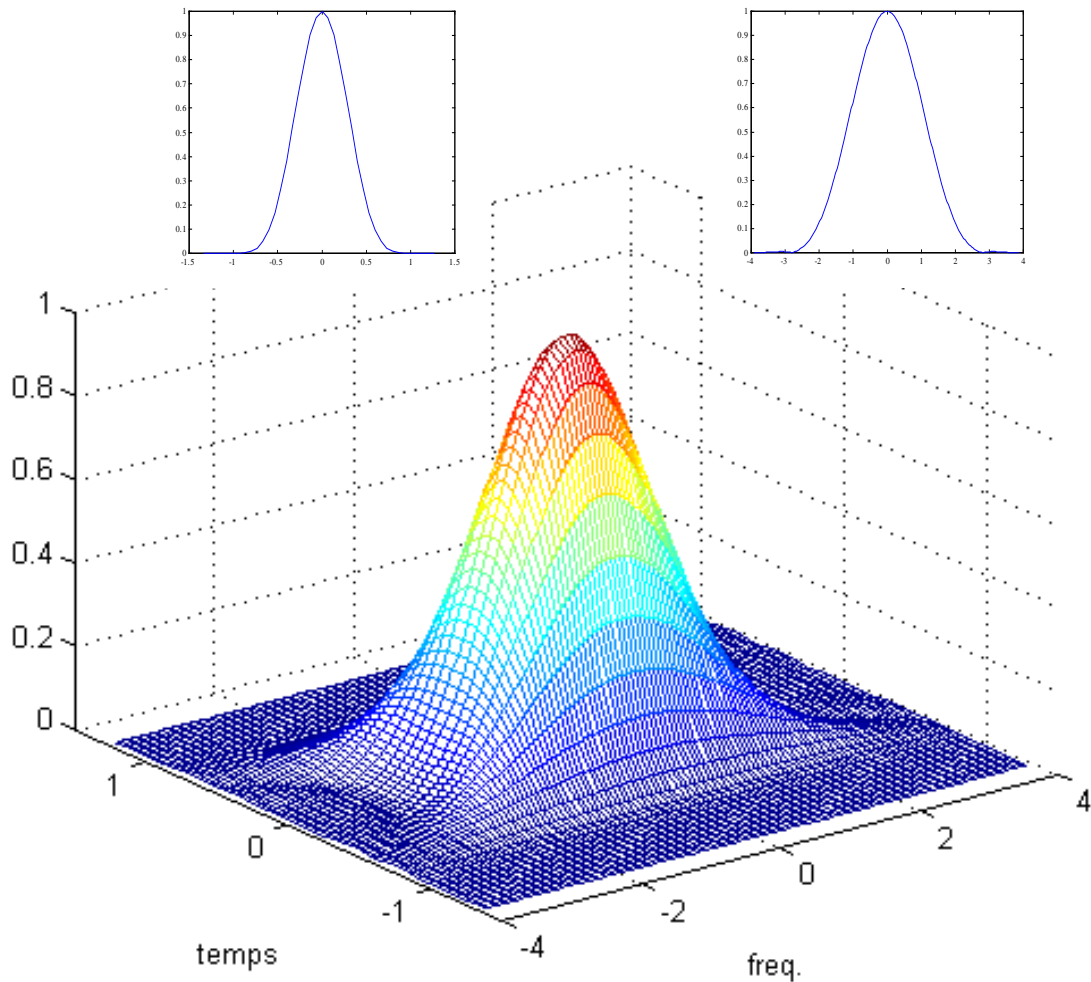


On constate que la pondération a permis de réduire les lobes secondaires de la coupe en fréquence ( $\tau = 0$ ).

#### 4.4 IMPULSION D'AMPLITUDE PONDEREE PAR UNE LOI

**DE HAMMING** Soit une impulsion non modulée en fréquence, de durée  $T$ . On se place ici dans le cas d'une impulsion dont l'amplitude n'est pas constante, mais pondérée par une loi de HAMMING.

Les deux encadrés représentent (de gauche à droite) les coupes de cette fonction d'ambiguïté à  $F = 0$  (évolution temporelle de la réponse du récepteur) et  $\tau = 0$  (évolution spectrale de la réponse du récepteur).



On constate que la pondération a permis de rendre pratiquement invisibles (en représentation linéaire) les lobes secondaires de la coupe en fréquence ( $\tau = 0$ ).

#### 4.5 IMPULSION D'AMPLITUDE "GAUSSIENNE" MODULEE LINEAIREMENT EN FREQUENCE

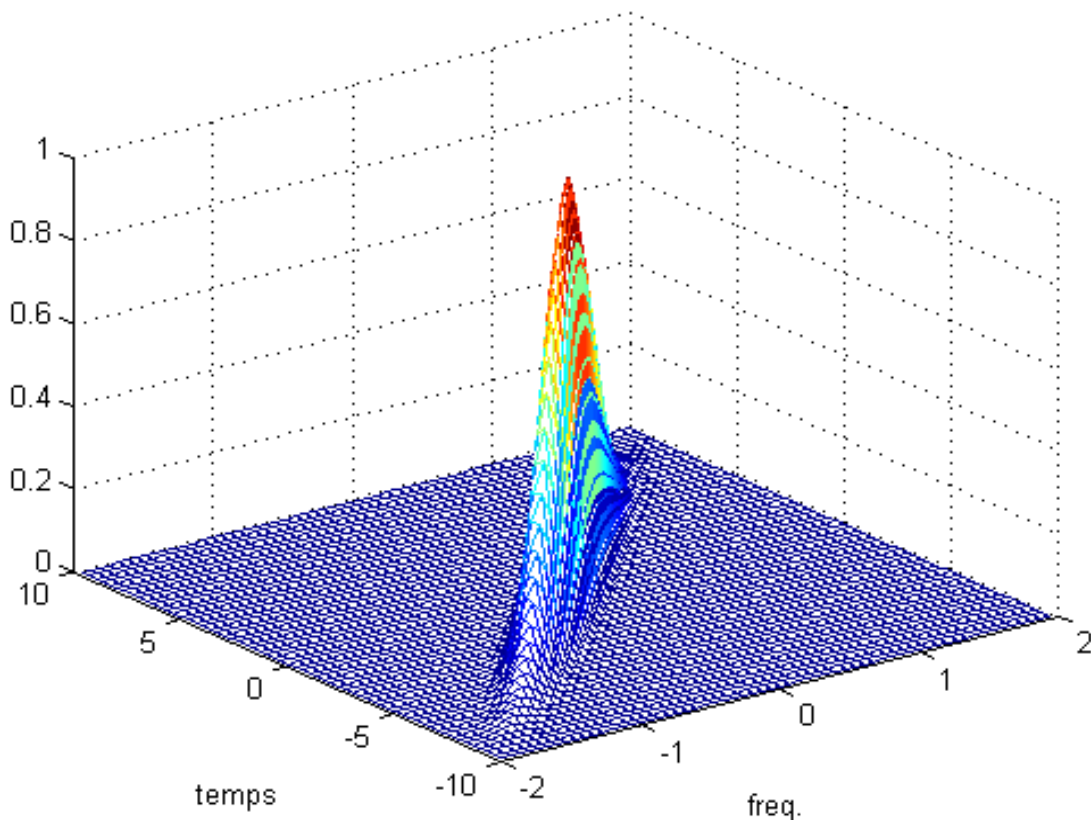
On se place ici dans le cas d'une impulsion dont l'amplitude n'est pas constante, mais pondérée par une loi de Gauss, modulée linéairement en fréquence.

Pour ce signal, à un coefficient près on a :

$$Z(t) = \exp\left\{\frac{-\pi t^2}{T_0^2}\right\} \cdot \exp\left\{\frac{-j\pi}{K} t^2\right\}$$

Sa fonction d'ambiguïté s'écrit :

$$|A(\tau, F)| = \exp\left\{-\frac{\pi\tau^2}{2T_0^2}\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{\pi}{2F_0^2} \left(F + \frac{\tau}{K}\right)^2\right\}$$



La figure met bien en évidence l'axe d'ambiguïté d'expression  $F = -\tau/K$ , établi au chapitre 17 dans le cas des radars à compression d'impulsion.

Son allure est symétrique en fréquence et en temps et ses coupes à  $\tau = 0$  ou  $F = 0$  sont des courbes de Gauss.

## 4.6 IMPULSION RECTANGULAIRE MODULEE LINEAIREMENT EN FREQUENCE

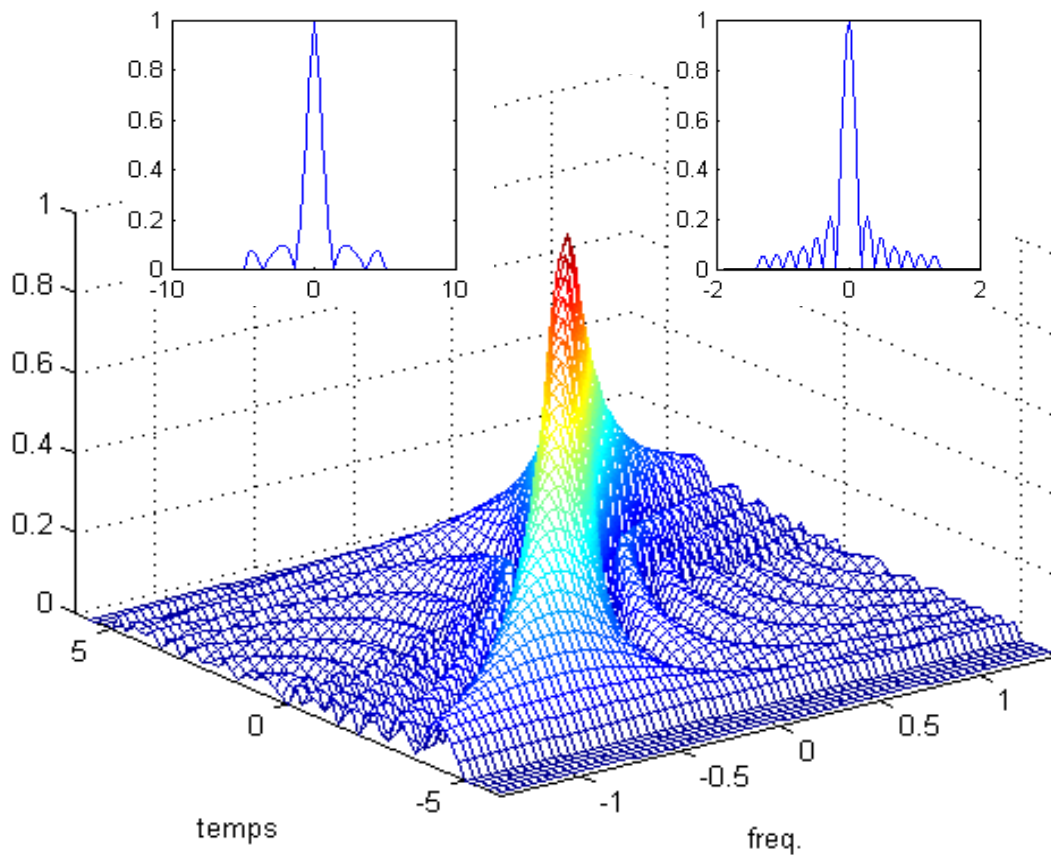
On se place ici dans le cas d'une impulsion d'amplitude constante, de durée T, modulée linéairement en fréquence.

Ce signal d'amplitude constante et de durée T s'écrit :

$$Z(t) = \exp\left\{\frac{j\pi t^2}{K}\right\}$$

Sa fonction d'ambiguïté a pour expression :

$$|A(\tau, F)| = \left| \frac{\sin(\pi \cdot (T - |\tau|) \cdot (F + \tau/K))}{\pi \cdot (T - |\tau|) \cdot (F + \tau/K)} \right| \cdot \left| \frac{T - |\tau|}{T} \right|$$



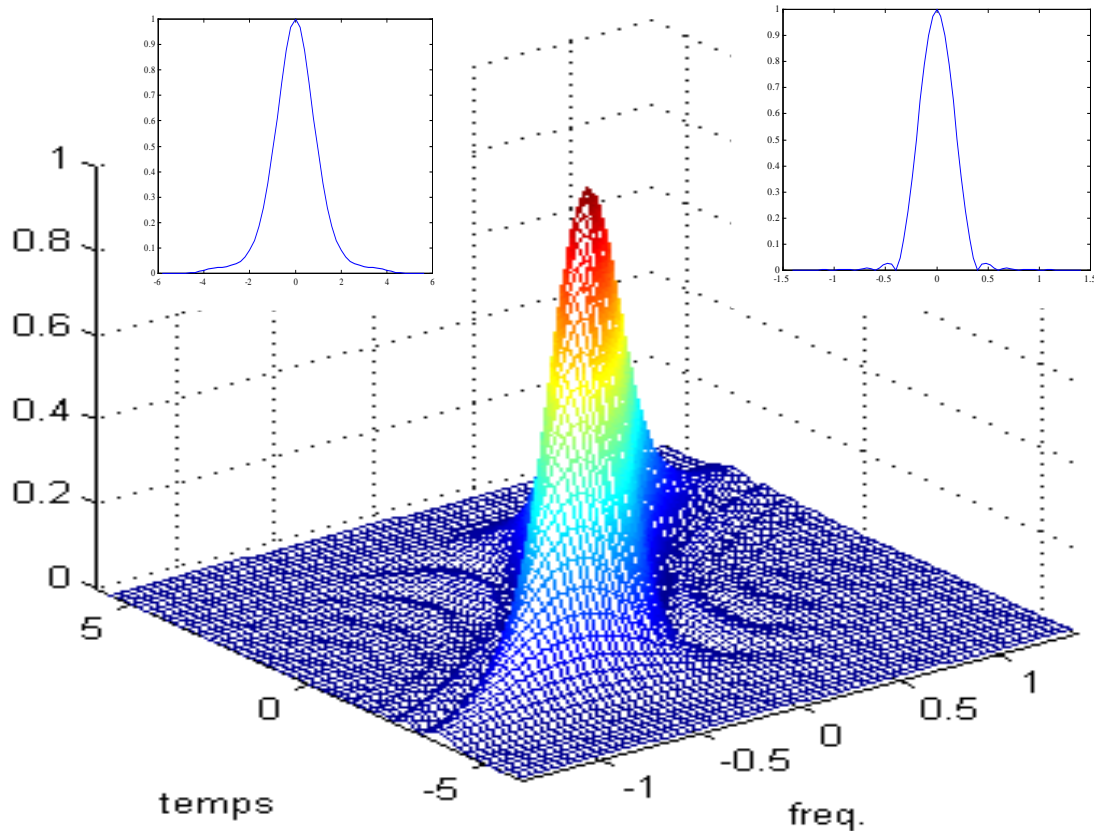
La figure met bien en évidence l'axe d'ambiguïté d'expression  $F = -\tau/K$ , établi au chapitre 17, dans le cas des radars à compression d'impulsion.

Les deux encadrés représentent ( de gauche à droite) les coupes de cette fonction d'ambiguïté à  $F = 0$  ( évolution temporelle de la réponse du récepteur) et  $\tau = 0$  ( évolution spectrale de la réponse du récepteur).

On constate la présence de lobes secondaires importants.

#### 4.7 IMPULSION D'AMPLITUDE « EN COSINUS », MODULE LINEAIREMENT EN FREQUENCE

On se place ici dans le cas d'une impulsion modulée linéairement en fréquence, dont l'amplitude n'est pas constante, mais pondérée par une loi en cosinus.



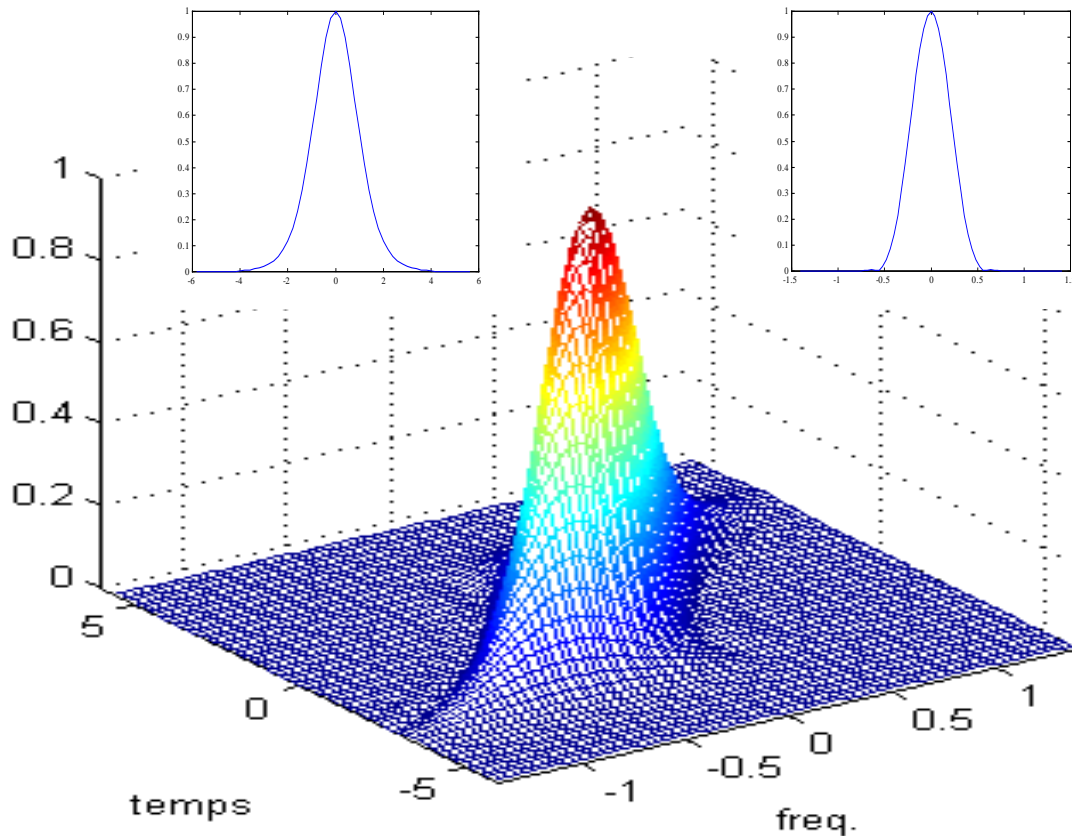
La figure met bien en évidence l'axe d'ambiguïté d'expression  $F = -\tau/K$ , établi au chapitre 17 dans le cas des radars à compression d'impulsion.

Les deux encadrés représentent ( de gauche à droite) les coupes de cette fonction d'ambiguïté à  $F = 0$  ( évolution temporelle de la réponse du récepteur) et  $\tau = 0$  ( évolution spectrale de la réponse du récepteur).

On constate que la pondération a permis de réduire les lobes secondaires, tant temporels que fréquentiels.

#### 4.8 IMPULSION D'AMPLITUDE « DE HAMMING », MODULEE LINEAIREMENT EN FREQUENCE

On se place ici dans le cas d'une impulsion modulée linéairement en fréquence, dont l'amplitude n'est pas constante, mais pondérée par une loi de HAMMING.



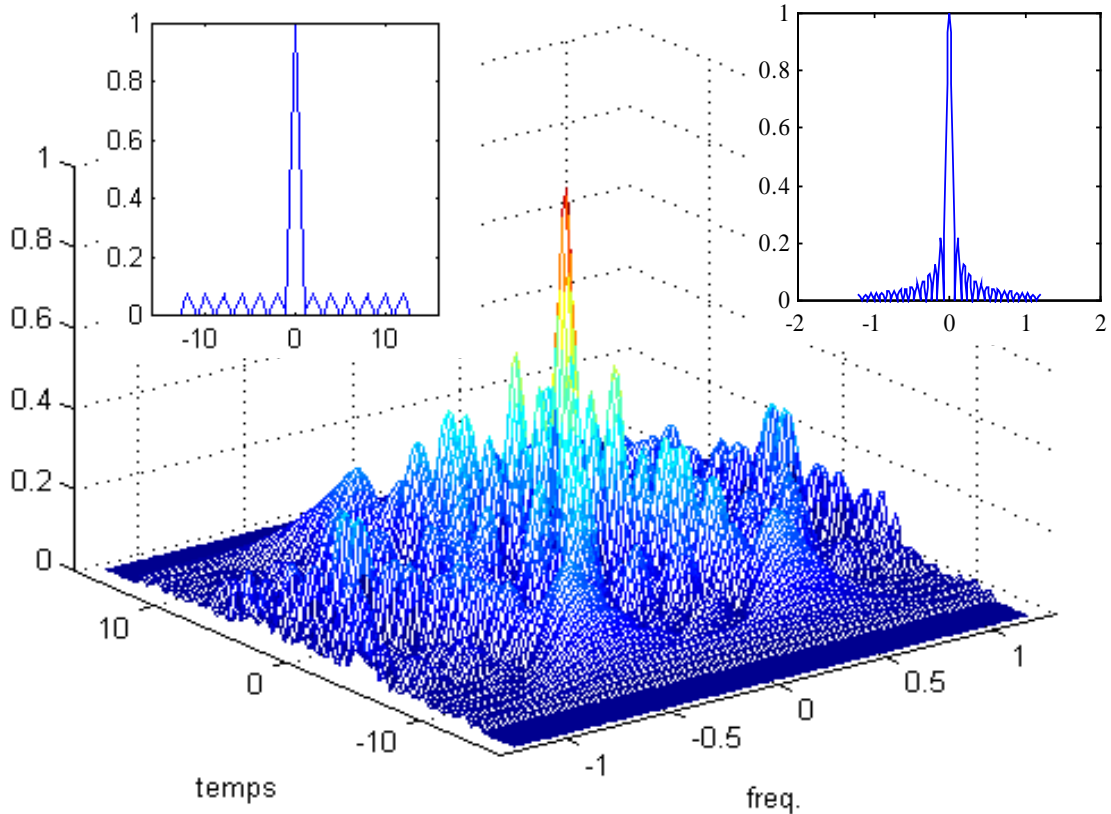
La figure met bien en évidence l'axe d'ambiguïté d'expression  $F = -\tau/K$ , établi au chapitre 17 dans le cas des radars à compression d'impulsion.

Les deux encadrés représentent ( de gauche à droite) les coupes de cette fonction d'ambiguïté à  $F = 0$  ( évolution temporelle de la réponse du récepteur) et  $\tau = 0$  ( évolution spectrale de la réponse du récepteur).

On constate que la pondération a permis de rendre pratiquement invisibles (en représentation linéaire) les lobes secondaires, tant temporels que fréquentiels.



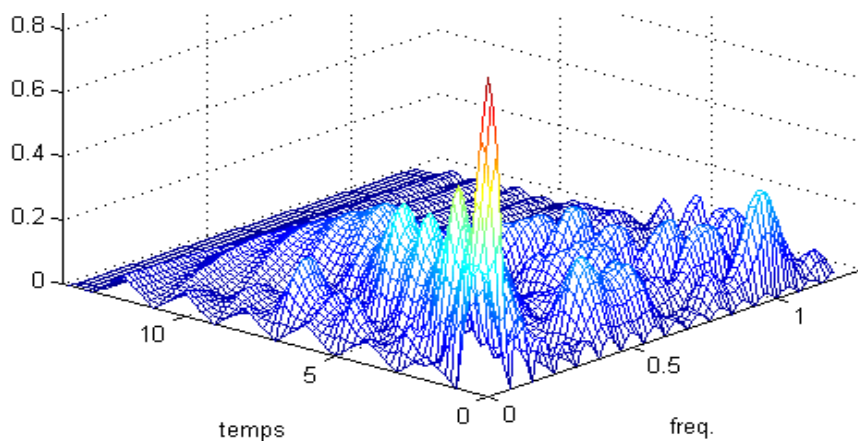
## 4.9 CODE DE BARKER A 13 MOMENTS



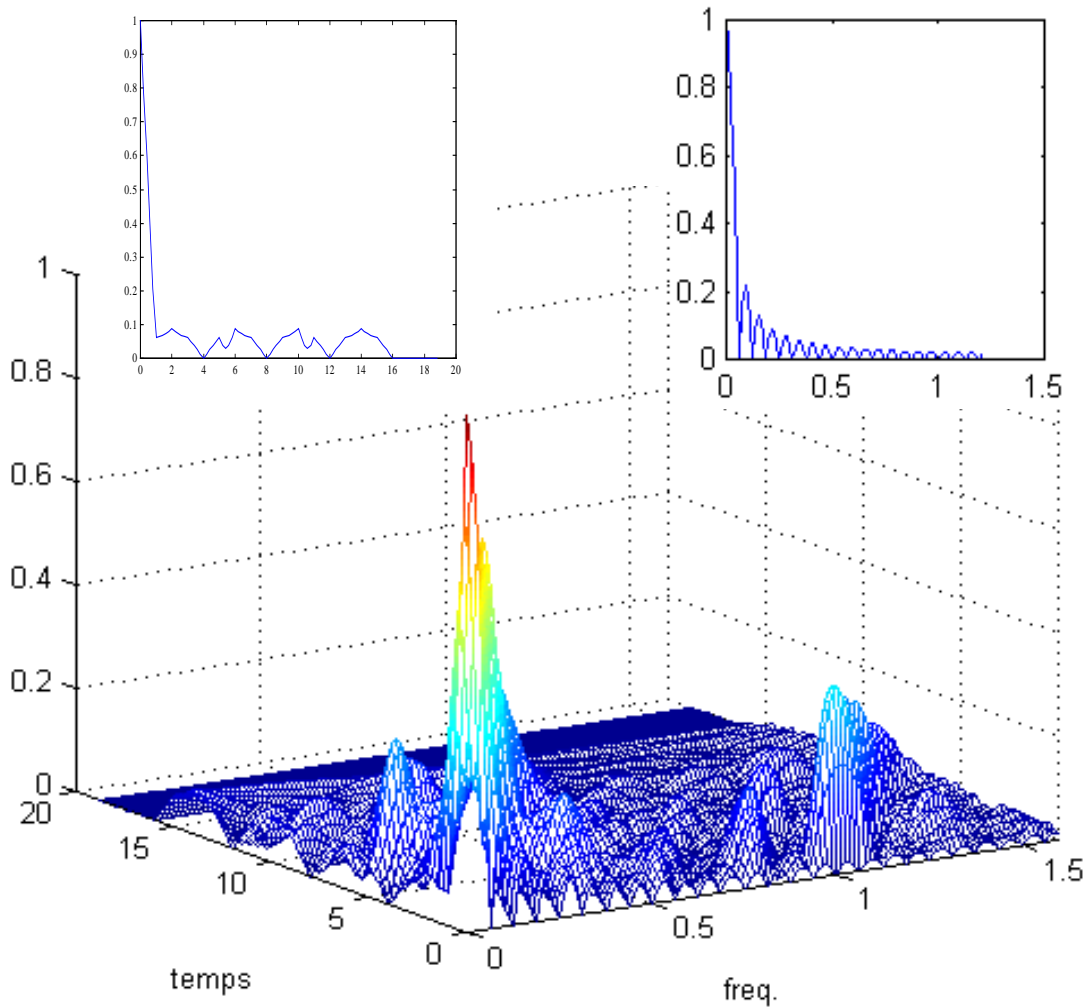
On se place ici dans le cas d'une impulsion formée d'échantillons successifs dont la phase peut être choisie entre les valeurs 0 ou  $\pi$ , selon une séquence définie par un code de BARKER à 13 moments.

Les deux encadrés représentent ( de gauche à droite) les coupes de cette fonction d'ambiguïté à  $F = 0$  ( évolution temporelle de la réponse du récepteur) et  $\tau = 0$  ( évolution spectrale de la réponse du récepteur).

On remarque que cette fonction présente des lobes secondaires très élevés aux fréquences doppler fortes, alors qu'elle est particulièrement bien adaptée aux fréquences doppler faibles, comme le montre sa coupe à  $F = 0$ .



**4.10 CODE DE FRANK A 16 MOMENTS** On se place ici dans le cas d'une impulsion formée d'échantillons successifs dont la phase peut être choisie entre les valeurs  $0$ ,  $\pi/2$ ,  $\pi$ ,  $3\pi/2$  ou  $2\pi$ , selon une séquence définie par un code de FRANK à 16 moments.



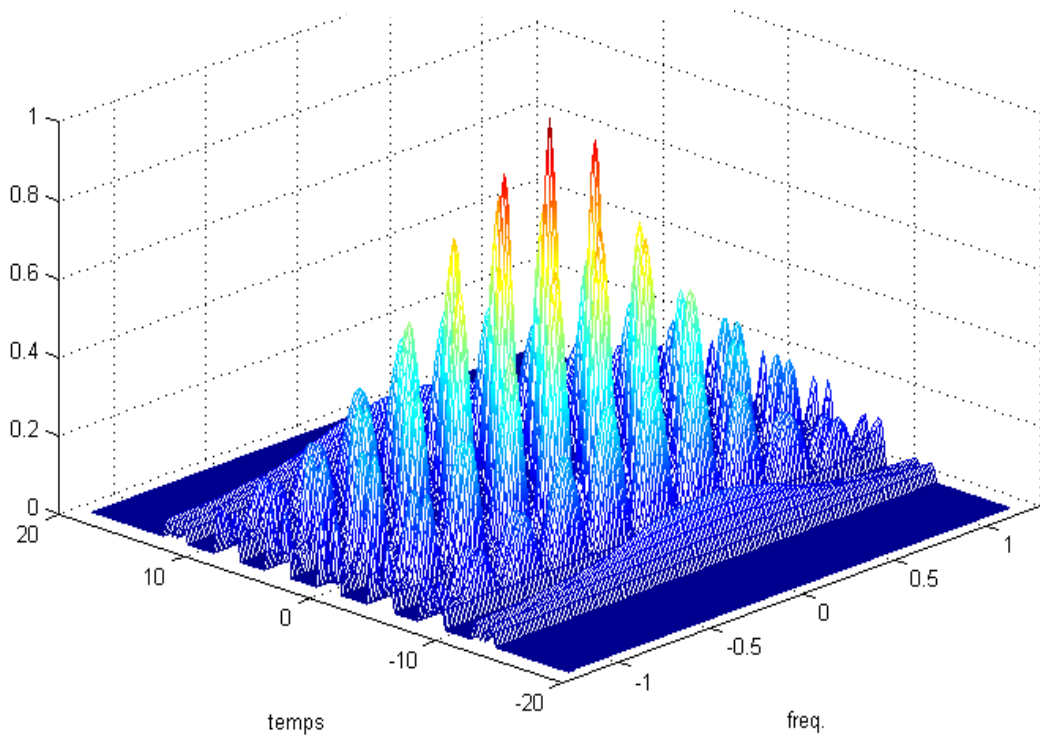
Les deux encadrés représentent ( de gauche à droite) les coupes de cette fonction d'ambiguïté à  $F = 0$  ( évolution temporelle de la réponse du récepteur) et  $\tau = 0$  ( évolution spectrale de la réponse du récepteur).

Quoique proche de la compression d'impulsion par modulation linéaire de fréquence, cette fonction ne présente pas d'axe d'ambiguïté très marqué.

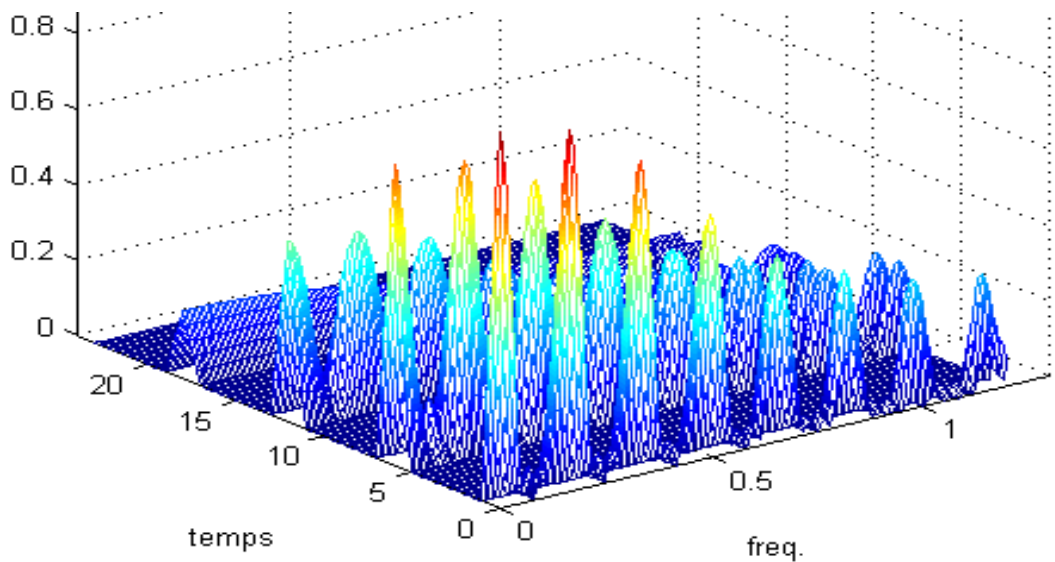
On remarque par contre que cette fonction présente des lobes secondaires très élevés à certaines fréquences doppler fortes.

### 4.11 TRAIN DE QUATRE IMPULSIONS, TRAITEMENT DOPPLER

Fonction globale

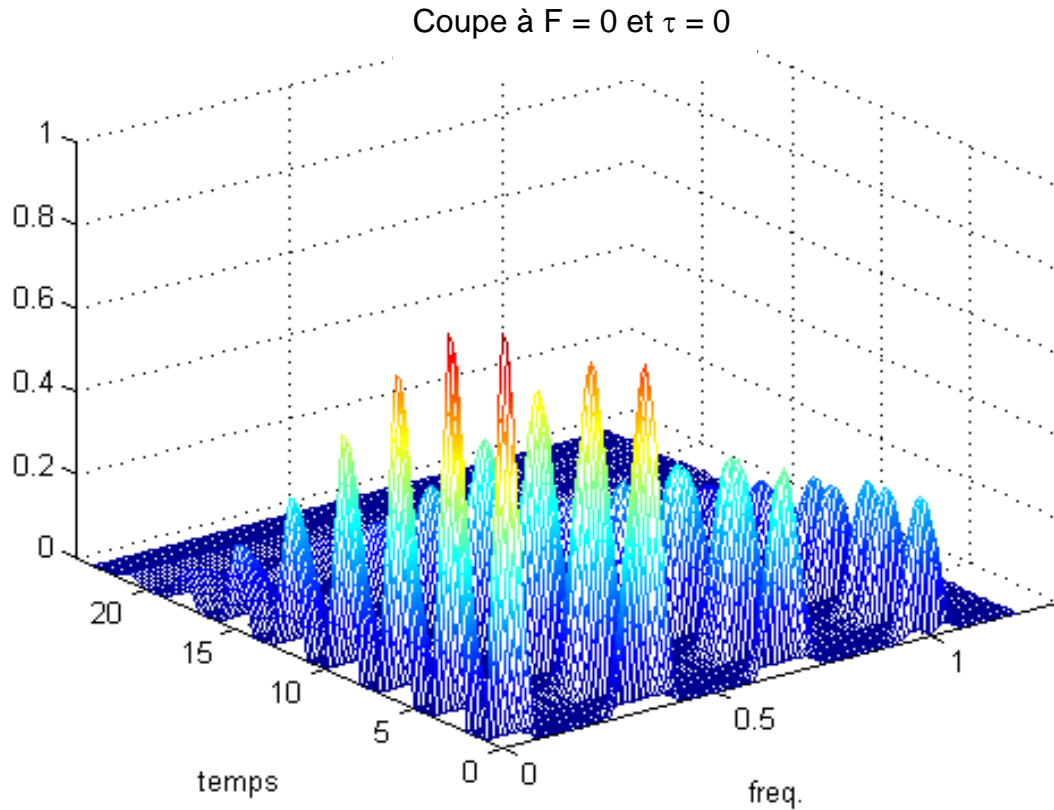


Coupe à  $F = 0$  et  $\tau = 0$



On retrouve sur ces deux coupes, les figures caractéristiques des radars pulse doppler.

## 4.12 TRAIN DE HUIT IMPULSIONS, TRAITEMENT DOPPLER



On retrouve bien les pics de la fonction d'ambiguïté liés à :

- l'ambiguïté distance tous les  $T_R$  ;
- l'ambiguïté de fréquence doppler tous les  $1/T_R$ .

Cette coupe fait également apparaître les zones de distance (temps) et les zones de fréquence doppler où l'amplitude de la fonction d'ambiguïté est nulle, ou quasi nulle.

En fréquence doppler, la pondération :

- naturelle, par le lobe d'antenne en rotation ;
- artificielle, introduite par le traitement ;

a une grande influence sur le niveau de la fonction entre deux pics d'ambiguïté.