

**CHAPITRE 19 - 1 : RECEPTEURS ET ANTENNES ADAPTATIFS****Approche physique : Adaptativité spectrale**

Les parties de ce chapitre concernant, la réception en bruit coloré, le filtrage auto-adaptatif et les antennes FFC adaptatives, sont inspirées des principes et des méthodes de résolution, exposés dans l'ouvrage de Monsieur François LE CHEVALIER :

« Principes de traitement des signaux radar et sonar » MASSON 1989.

1	INTRODUCTION.....	2
2	RETOUR SUR LES RECEPTEURS LINEAIRES - GENERALISATION ET NORMALISATION.....	3
2.1	REFERENCE D'ENERGIE UNITAIRE.....	3
2.2	REFERENCE QUELCONQUE, NORMALISATION.....	4
2.3	NOUVEAUX SCHEMAS DES RECEPTEURS ADAPTES.....	5
3	RECEPTION OPTIMALE EN BRUIT COLORE .....	6
3.1	FILTRES BLANCHISSANTS .....	6
3.2	FILTRE SUPERBLANCHISSANT .....	7
3.3	METHODE SOUSTRUCTIVE SANS REFERENCE DE BRUIT .....	8
3.4	ESTIMATION DU GAIN DE TRAITEMENT.....	9
3.5	CONCLUSION .....	10
4	EXPLOITATION D'UNE REFERENCE AUXILIAIRE DE BRUIT - FILTRAGE AUTO - ADAPTATIF OU AUTO - ADAPTATIVITE SPECTRALE.....	11
4.1	SUPPRESSION ADAPTATIVE DU BRUIT COLORE.....	11
4.1.1	Principe de base.....	11
4.1.2	Recherche de la meilleure estimation.....	12
4.1.3	Limitation liée aux bruits blancs des deux voies.....	14
4.1.4	Limitation liée à la présence de signal dans la voie auxiliaire.....	15
4.2	SUPPRESSION ADAPTATIVE PAR FILTRE TRANSVERSAL.....	16
4.2.1	Principe de réalisation .....	16
4.2.2	Calcul par récurrence. Boucle d'asservissement.....	17
5	ANNEXES AU CHAPITRE 19-1.....	20
5.1	Annexe 1 (§ 4.1.1) Suppression adaptative du bruit coloré : calcul de $U_0$ .....	20
5.2	Annexe 2 (§ 4.1.3) Calcul de la densité spectrale du signal d'erreur .....	21
5.3	Annexe 3 (§ 4.1.4) Calcul de l'effet d'un résidu de signal dans la référence .....	22
5.4	Annexe 4 (§ 4.2.1) Calcul du filtre transversal $W$ .....	23
5.5	Annexe 5 (§ 4.2.2) Calcul du terme de récurrence (à 3 dimensions) .....	24
5.6	Annexe 6 (§ 4.2.2) Conditions de convergence .....	25

## 1 INTRODUCTION

L'étude des récepteurs linéaires réalisée au chapitre 17, a permis de dégager les structures de base de ces récepteurs lorsque **les bruits**, dans la bande du récepteur, sont **blancs et gaussiens complexes**. Elle a conduit aux structures bien connues de récepteurs

- corrélation suivie d'une détection quadratique ;
- filtre adapté suivi d'une détection quadratique.

Pour distinguer les échos radars de leur environnement, somme de l'ensemble des parasites qu'il perçoit, celui-ci dispose d'un **pouvoir de résolution**:

- **en distance** ou mesure du temps de propagation de l'onde ;
- **en vitesse** ou mesure de l'effet doppler sur cette onde ;
- **angulaire** de par la directivité, de son aérien, ce qui se traduit lorsque celui-ci balaye l'espace observé par une résolution temporelle des signaux à l'échelle du temps d'observation de l'espace, ou directement par une **résolution spatiale** lorsque plusieurs directions de cet espace sont observées simultanément.

Ces pouvoirs de résolution ont été établis au chapitre 18.

Dans la réalité, les bruits et parasites extérieurs ont des caractéristiques très variées qui peuvent porter sur :

- leur comportement temporel, en particulier leur stationnarité ;
- leurs caractéristiques spectrales, lorsque le bruit n'est pas blanc mais de densité spectrale variable ou « colorée » ;
- leur dépendance au signal émis selon qu'ils soient des échos radars (ou leurres ou interférences) ou des bruits engendrés indépendamment de ce signal ;
- la répartition spatiale de leurs sources.

Dans un premier temps, après un approfondissement de la notion de récepteur optimal en bruit blanc, nous chercherons à construire des récepteurs qui, sur la base d'une connaissance a priori ou d'une analyse préalable de l'environnement, tendent à une optimisation de la détection du signal utile en bruit coloré, amenant à définir la structure de ces récepteurs.

Cela nous conduira à examiner la notion de traitement adaptatif qui consiste à concevoir un récepteur qui, sur la base d'une mesure des caractéristiques de l'environnement, construit un traitement optimal en fonction des caractéristiques mesurées, afin d'en extraire le signal utile.

L'application de ce concept aux antennes amènera aux traitements d'adaptation spatiale par « opposition des lobes secondaires » ou OLS, puis aux antennes adaptatives à formation de faisceau par le calcul, pour se terminer par quelques notions de super-résolution.

Nous n'examinerons ici que des signaux qui peuvent être considérés comme stationnaires pendant la durée du traitement du signal, la généralisation de ces procédés à des signaux non stationnaires sera par la suite examinée, au plan théorique, au chapitre 23.

## 2 RETOUR SUR LES RECEPTEURS LINEAIRES - GENERALISATION ET NORMALISATION

### 2.1 REFERENCE D'ENERGIE UNITAIRE

Nous avons souvent utilisé le signal vidéo équivalent  $Z(t)$  pour caractériser un signal radar. Celui ci peut être rapporté à un signal de référence, d'énergie unitaire :  $a(t)$ , qui contient toute l'information utile du signal sauf son amplitude.

Par rapport à ce signal de référence, un signal quelconque est exprimé par la relation :

$$Z(t) = \gamma \cdot a(t - \tau) \cdot e^{j2\pi Ft}$$

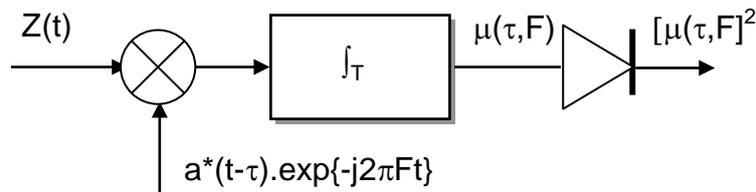
Expression ou :

- $\gamma$ , est l'amplitude complexe du signal ;
- $\tau$ , est le retard du signal par rapport à la référence  $a(t)$  ;
- $F$  est la dérive de fréquence doppler.

Une référence adaptée à ce signal quelconque peut être définie à partir de  $a(t)$  par la relation :

$$r(t) = a^*(t - \tau) \cdot e^{-j2\pi Ft}$$

Reportons ces données dans le corrélateur du chapitre 18 paragraphe 1, lorsque le corrélateur est attaqué par le signal inconnu  $Z(t) = \gamma \cdot a(t)$  :



L'expression du signal à la sortie du corrélateur devient :

$$\mu(\tau, F) = \gamma \cdot \int_{\tau} a(t) \cdot a^*(t - \tau) \exp\{-j2\pi Ft\} dt$$

Ce qui permet d'établir que, à la position exacte de la cible :

$$\mu(0,0) = \gamma \cdot \int_{\tau} a(t) \cdot a^*(t) \cdot dt = \gamma$$

La corrélation est suivie d'un détecteur quadratique, le signal observé est donc  $[\mu(\tau, F)]^2$ .

On définit la position estimée  $[\tau, F]$  de la cible, comme celle pour laquelle l'amplitude  $[\mu(\tau, F)]^2$  passe par un maximum.

Nous allons généraliser cette propriété :

- En définissant la variable  $\theta$  désignant la position dans l'espace  $[\tau, F]$  de la cible.
- En écrivant la référence sous la forme :

$$a(t - \tau) \cdot e^{j2\pi Ft} = a(t, \theta)$$

- En écrivant la réplique sous la forme :

$$r(t) = a^*(t - \tau) \cdot e^{-j2\pi Ft} = a^*(t, \theta)$$

ce qui revient à écrire :

$$\Gamma(\theta) = \mu(\tau, F) = \int_{\tau} Z(t) \cdot a^*(t, \theta) \cdot dt$$

On peut ainsi poser que la meilleure estimation de la position  $\theta$  de la cible, est celle qui maximise le carré du module de  $\Gamma(\theta)$  soit :

$$\hat{\theta} \Rightarrow \left| \int_{\tau} Z(t) \cdot a^*(t, \theta) \cdot dt \right|^2 \Rightarrow \text{Maximum}$$

En outre on a démontré que, si  $\theta$  est la position exacte de la cible,  $\Gamma(\theta)$  passe par un maximum égal à  $\gamma$ . Ce qui permet d'établir la meilleure estimation de  $\gamma$  :

$$\hat{\gamma} = \int_{\tau} Z(t) \cdot a^*(t, \hat{\theta}) \cdot dt$$

**Ces deux relations généralisent les propriétés des récepteurs linéaires**, qui ont la capacité, non seulement de mesurer la position présumée d'une cible, mais encore d'estimer l'amplitude complexe du signal issu de cette cible.

## 2.2 REFERENCE QUELCONQUE, NORMALISATION

Par contre, si la réplique  $a_1(\theta)$  n'est pas d'énergie unitaire, mais égale à :

$$E_a = \int |a_1(t)|^2 dt$$

$\Gamma(\theta)$  dépend de l'énergie de cette réplique. En particulier, dans le cas où  $a_1$  est proportionnel à  $a$  on trouve à chaque instant :

$$a_1 = a \cdot \sqrt{E_a}$$

et la sortie de la corrélation devient :

$$\Gamma_1(\theta) = \Gamma(\theta) \cdot \sqrt{E_a}$$

Pour s'affranchir de cette dépendance du signal traité à l'énergie de la réplique, il convient donc d'introduire sur  $[\Gamma(\theta)]^2$  un coefficient de normalisation égal à  $1/E_a$  et la relation définissant la position probable du signal devient :

$$\hat{\theta} \Rightarrow \frac{\left| \int_{\tau} Z(t) \cdot a^*(t, \theta) \cdot dt \right|^2}{\int |a(t)|^2 dt} \Rightarrow \text{Maximum}$$

En outre, si l'amplitude complexe de signal  $Z(t)$  se réfère à la référence  $a_1(\theta)$ , en se reportant au paragraphe précédent on peut écrire :

$$\Gamma(\hat{\theta}) = \mu(0,0) = \gamma \cdot \int_T a_1(t) \cdot a_1^*(t) \cdot dt = \gamma \cdot E_a$$

Il convient donc, pour rendre le résultat indépendant de l'énergie de la réplique, d'introduire sur l'expression de  $\gamma$  un coefficient de normalisation égal à  $1/E_a$  et la relation définissant l'amplitude complexe probable du signal devient :

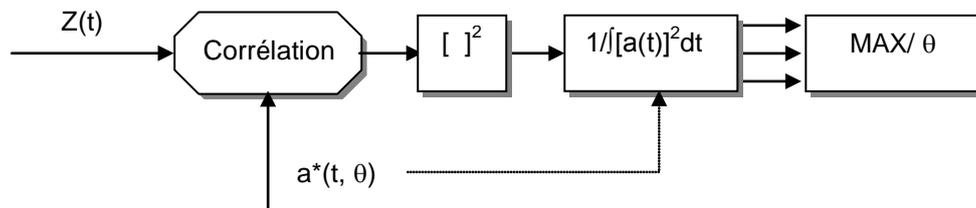
$$\hat{\gamma} = \frac{\int_T Z(t) \cdot a^*(t, \hat{\theta}) \cdot dt}{\int |a(t)|^2 dt}$$

Nous étendrons ces coefficients de normalisation à tous types de répliques d'énergie non unitaire.

Les considérations théoriques exposées au chapitre 23 confirment cette hypothèse et montrent que les relations précédentes définissent bien les estimateurs optimums de la position et de l'amplitude du signal issu de la cible.

### 2.3 NOUVEAUX SCHEMAS DES RECEPTEURS ADAPTES

Les considérations précédentes conduisent au schéma suivant, généralisation du **récepteur linéaire à corrélation** :

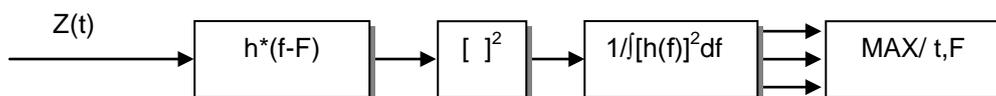


Cette définition peut être étendue au **récepteur à filtre adapté** :

- en prenant comme filtre  $h^*(f)$ , transformée de Fourier de la réplique  $a^*(t)$ , centré sur la fréquence  $F$  du signal recherché,
- en se souvenant que l'énergie de la réplique s'exprime également en fonction de son spectre :

$$E_a = \int |a(t)|^2 dt = \int |h(f)|^2 df$$

ce qui conduit au schéma suivant :



### 3 RECEPTION OPTIMALE EN BRUIT COLORE

#### Elimination des parasites à bande étroite par « blanchiment »

##### 3.1 FILTRES BLANCHISSANTS

Lorsqu'au bruit thermique naturel s'ajoutent des parasites ou des bruits colorés, plusieurs cas sont à considérer :

- Le parasite est à large bande, dans ce cas il est vu par le récepteur comme un bruit blanc qui s'ajoute au bruit naturel et le traitement optimal est celui décrit au paragraphe précédent.
- Le parasite est à bande étroite, dans ce cas il ne couvre pas toute la bande du signal et un traitement particulier peut lui être appliqué.

Si le parasite est de très grande amplitude, il peut être éliminé par un filtre réjecteur « coupant » la sous bande dans laquelle il se trouve. C'est la solution mise en place en filtrage doppler, pour éliminer les retours d'échos fixes de forte puissance, avant d'opérer à un filtrage vitesse des cibles utiles parmi les autres échos parasites.

Par contre cette solution ne paraît pas optimale pour les parasites d'amplitude moyenne et faible, car la perte introduite par le filtre réjecteur sur le signal peut être supérieure au gain apporté par l'élimination du parasite.

La solution de compromis est alors de ne pas couper entièrement la bande parasitée, mais d'agir sur le gain dans cette bande pour que le parasite soit ramené au niveau du bruit naturel. Ainsi : pour des parasites faibles la perte sur le signal sera limitée, et pour des parasites forts, le gain apporté par leur élimination devrait compenser la perte sur le signal.

La solution physique à ce problème consiste donc à introduire sur la voie de réception un **filtre blanchissant**, tel que par son action il ramène le spectre de bruit à un bruit blanc soit, si  $\phi_n(f)$  est le spectre de bruit, un filtre de transmittance  $U(f)$  telle que :

$$\phi_n(f) \cdot |U(f)|^2 = 1$$

Ce filtre agissant également sur le signal, son spectre s'en trouve modifié et le **filtre adapté** au signal modifié **après blanchiment** a pour expression, en reprenant les notations du paragraphe 2 :

$$F_b(f) = h^*(f) \cdot U^*(f)$$

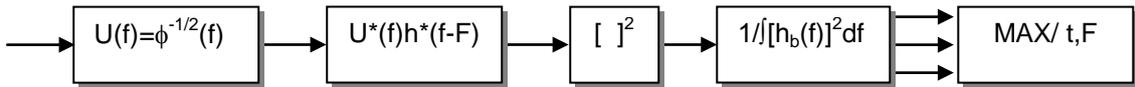
De même, la réplique adaptée au traitement par corrélation n'est plus  $a^*(t)$  mais une nouvelle **réplique blanchie**, transformée inverse de Fourier de  $F_b(f)$  :

$$a_b^* = \int h^*(f) \cdot U^*(f) \cdot e^{j2\pi ft} df$$

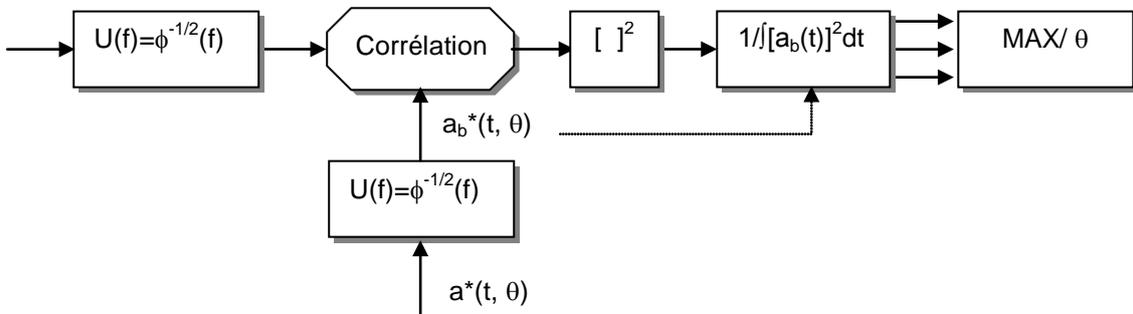
Dans ce cas, l'énergie de la réplique n'est plus unitaire d'où le coefficient de normalisation :

$$\frac{1}{\int |a_b(t)|^2 dt} = \frac{1}{\int |h_b(f)|^2 df} = \frac{1}{\int |h(f) \cdot U(f)|^2 df}$$

Ces considérations conduisent aux deux schémas suivants des **récepteurs en bruit coloré par filtre blanchissant** :



Filtre blanchissant et filtrage adapté au signal modifié



Filtre blanchissant et corrélation adaptée au signal modifié

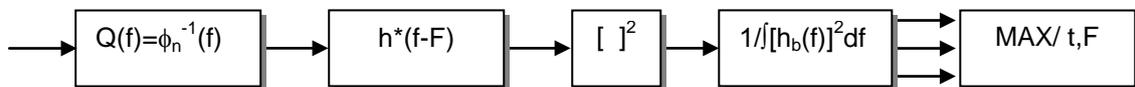
### 3.2 FILTRE SUPERBLANCHISSANT

Le schéma «filtres blanchissants plus filtre adapté» se simplifie si on remarque que l'ensemble du signal et du bruit qui l'accompagne, sont soumis successivement au filtre  $U(f)$  puis au filtre  $U^*(f)$ . Cela se ramène donc à l'action d'un filtre unique de transmittance :

$$Q(f) = |U(f)|^2 = \phi_n^{-1}$$

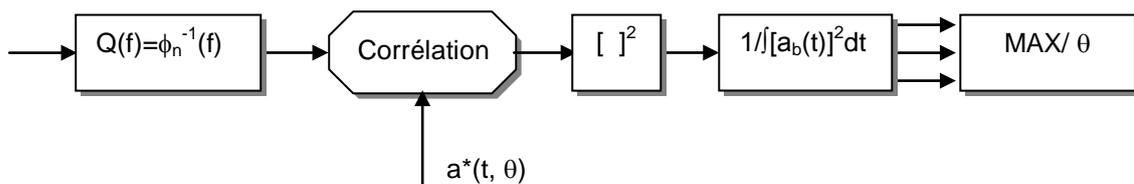
Ce filtre est dit «superblanchissant» car en effet son action sur le bruit va au delà du blanchiment produit par l'action de  $U(f)$ .

D'où un nouveau schéma



Filtre superblanchissant et filtre adapté au signal

Le même filtre placé en amont d'un corrélateur donne un résultat identique, ce qui conduit au schéma suivant :



Filtre superblanchissant et corrélation adaptée au signal

On note que, dans les deux schémas, la normalisation reste inchangée, l'effet sur le signal du filtre superblanchissant étant identique à celle des deux filtres blanchissants.

### 3.3 METHODE SOUSTRUCTIVE SANS REFERENCE DE BRUIT

Une troisième approche du récepteur optimum consiste à rechercher par filtrage la meilleure estimée possible de la perturbation pour la retrancher ensuite au bruit incident, avant passage dans le filtre adapté.

Soit  $U_0(f)$  la transmittance du filtre qui réalise cette opération. Il voit à son entrée le bruit composite formé du bruit blanc naturel  $N_0$  de densité spectrale constante  $\phi_0$  et du bruit coloré dû à la perturbation  $N_c$  de densité spectrale  $\phi_c(f)$ .

Ce filtre a pour fonction de trouver la meilleure estimation de la perturbation :  $\hat{N}_c(t)$ , lorsqu'il est soumis à son entrée à la somme des bruits  $N(t) = N_c(t) + N_0(t)$  telle que soit **rendue minimale** l'expression :

$$\varepsilon^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |N_c(t) - \hat{N}_c(t)|^2 dt$$

qui est la puissance portée par le signal d'erreur :  $N_c(t) - \hat{N}_c(t)$ .

On désignera par  $H_c(f)$  et  $\hat{H}_c(f)$  les spectres des échantillons de durée  $T$  de  $N_c(t)$  et  $\hat{N}_c(t)$ , ce qui permet d'écrire, en appliquant la relation de Parseval :

$$\varepsilon^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int |H_c(f) - \hat{H}_c(f)|^2 df$$

$$\varepsilon^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int \left[ |H_c(f)|^2 + |\hat{H}_c(f)|^2 - 2\text{Réal}(H_c^*(f) \cdot \hat{H}_c(f)) \right] \cdot df$$

La définition du filtre  $U_0$  permet d'écrire :

$$\hat{H}_c(f) = U_0(f) \cdot (H_0(f) + H_c(f))$$

et :

$$\int H_0(f) \cdot H_c^*(f) \cdot df = \int N_0(t) \cdot N_c(t) \cdot dt = 0$$

car  $N_0$  et  $N_c$  sont indépendants et de valeur moyenne nulle. Donc :

$$2\text{Réal}(H_c^*(f) \cdot \hat{H}_c(f)) = 2U_0 |H_c(f)|^2 + \text{terme de moyenne nulle}$$

Par ailleurs on peut écrire pour les trois signaux en présence :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|H(f)|^2}{T} = \phi(f)$$

Ce qui, en notant que  $U_0$  est réel comme  $\phi_0$  et  $\phi_c$ , amène à l'expression :

$$\varepsilon^2 = \int \left( U_0^2(f) \cdot \phi_n(f) + \phi_c(f) - 2U_0(f) \cdot \phi_c(f) \right) \cdot df = \Psi(f) \cdot df$$

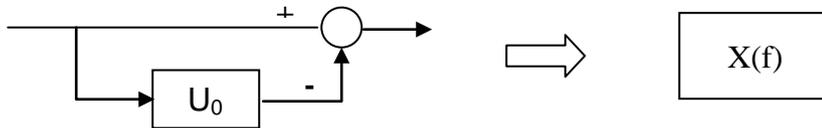
et :

$$\frac{d\Psi}{dU_0} = 2U_0(f) \cdot \phi_n(f) - 2\phi_c(f)$$

$\varepsilon^2$  passe par un minimum si sa dérivée s'annule, donc celle de  $\Psi$  également, soit :

$$U_0(f) = \frac{\phi_c(f)}{\phi_n(f)} = \frac{\phi_c(f)}{\phi_0 + \phi_c(f)} = \frac{\phi_c(f)}{\phi_n(f)}$$

L'action du filtre  $U_0$  peut se schématiser comme suit :



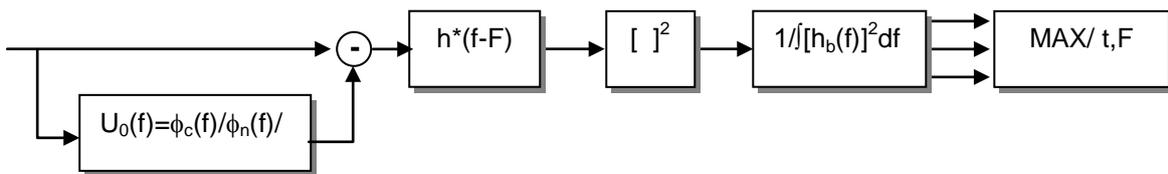
Ce qui permet de rechercher l'expression du filtre équivalent à la boucle contenant  $U_0$  :

$$X(f) = 1 - U_0(f) = 1 - \frac{\phi_c(f)}{\phi_0(f) + \phi_c(f)} = \frac{\phi_0(f)}{\phi_0(f) + \phi_c(f)} = \frac{\phi_0}{\phi_n(f)}$$

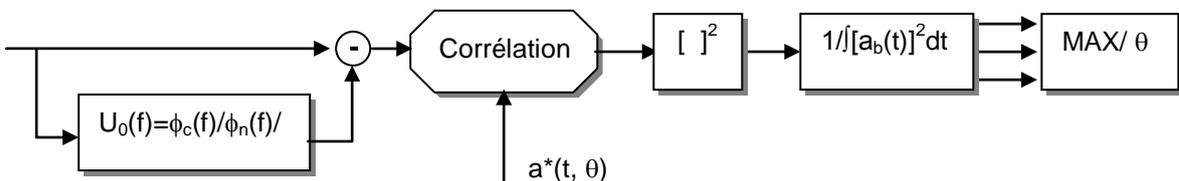
Soit, en se reportant à la définition du filtre superblanchissant :

$$1 - U_0(f) = \phi_0 \cdot Q(f)$$

On constate donc, à une constante près, que **l'action du filtre  $U_0$  est identique à celle du filtre superblanchissant  $Q(f)$** . On peut donc simplement substituer la boucle contenant  $U_0$  au filtre  $Q(f)$  dans les schémas des récepteurs à filtre superblanchissant, pour aboutir aux schémas suivants :



Soustraction d'une estimation du brouillage et filtrage adapté au signal



Soustraction d'une estimation du brouillage et corrélation adaptée au signal

### 3.4 ESTIMATION DU GAIN DE TRAITEMENT

Le rapport signal sur bruit, à la sortie d'un simple filtre adapté au signal, peut s'écrire à partir des éléments suivants (Cf. chapitre 17 § 1.1.2) :

$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n(f) \cdot |F(f)|^2 df$$

$$S = \frac{1}{2} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) \cdot F(f) \cdot df \right|^2$$

Soit, si :  $F(f) = h^*(f)$  et  $H(f) = \gamma \cdot h(f)$  :

$$\left( \frac{S}{B} \right)_0 = \frac{\gamma^2 \cdot \left| \int_{-\infty}^{+\infty} |h(f)|^2 \cdot df \right|^2}{2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n(f) \cdot |h(f)|^2 df} = \frac{\gamma^2}{2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n(f) \cdot |h(f)|^2 df}$$

Dans les cas étudiés ci avant, qui sont tous équivalents, il suffit de tenir compte de l'action du filtre  $Q(f)$  sur le signal comme sur le bruit. Le résultat précédent devient alors :

$$\left( \frac{S}{B} \right)_c = \frac{\gamma^2 \cdot \left| \int_{-\infty}^{+\infty} |h(f)|^2 \cdot Q(f) \cdot df \right|^2}{2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n(f) \cdot Q^2(f) \cdot |h(f)|^2 df}$$

Soit, comme  $Q(f) = \phi_n(f)^{-1}$  :

$$\left( \frac{S}{B} \right)_c = \frac{\gamma^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |h(f)|^2 \phi_n^{-1}(f) \cdot df$$

D'où le gain apporté par l'optimisation :

$$\boxed{\frac{(S/B)_c}{(S/B)_0} = \int |h(f)|^2 \cdot \phi_n(f) \cdot df \cdot \int |h(f)|^2 \cdot \phi_n^{-1}(f) \cdot df}$$

L'application de l'inégalité de Schwartz :

$$\int |X(f)|^2 df \cdot \int |Y(f)|^2 df \geq \left| \int X(f) \cdot Y^*(f) \cdot df \right|^2$$

à cette expression,  $\phi_n$  étant réel et  $h(f)$  d'énergie unitaire, permet de vérifier :

- qu'elle est toujours supérieure à l'unité,
- que l'égalité a lieu pour  $\phi_n(f) = C^{te}$ , donc pour un bruit blanc.

L'application de la relation précédente à des cas réels, permet de caractériser l'efficacité des traitements.

### 3.5 CONCLUSION

Les trois méthodes de traitement des bruits colorés : filtres blanchissants, filtre unique superblanchissant et méthode soustractive, sont équivalentes.

Elles conduisent toutes les trois à minimiser la puissance du bruit coloré avant filtrage ou corrélation adapté au signal.

Elles représentent ce que l'on peut faire de mieux, compte tenu de l'information disponible, qui se limite au profil spectral de la somme bruit blanc plus parasite coloré, sur la voie contenant le signal.

Elles amènent à la même normalisation, définie sur le cas du filtre blanchissant.

## 4 EXPLOITATION D'UNE REFERENCE AUXILIAIRE DE BRUIT - FILTRAGE AUTO - ADAPTATIF OU AUTO - ADAPTATIVITE SPECTRALE

Dans les paragraphes précédents, des schémas possibles de récepteurs optimaux en présence de bruits colorés ont été proposés, dans l'hypothèse où le spectre de puissance du bruit, était connu. Cela n'est pas le cas en pratique, la situation des objets vus par le radar se renouvelant constamment :

- par modification dans le temps des caractéristiques des objets eux - mêmes (fluctuation, déplacement... ) ;
- par modification du paysage observé par le radar, dans lequel ces objets sont présents (balayage angulaire, changement de fréquence d'émission).

Par ailleurs, si les phénomènes mis en cause ne varient pas trop rapidement, il peut être possible de les enregistrer pour ensuite les analyser et ainsi disposer d'une connaissance plus approfondie que la simple connaissance d'un profil spectral.

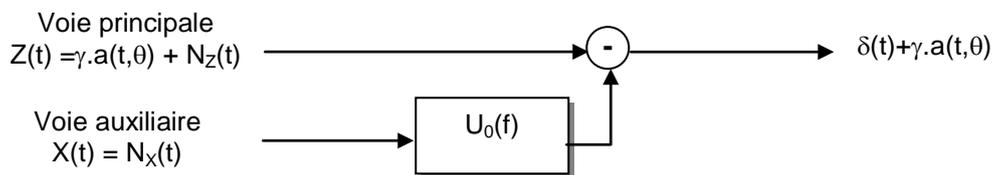
On se placera donc dans le cas où les processus donnant naissance aux bruits sont stationnaires à l'échelle du temps d'analyse du signal. Cette hypothèse de **stationnarité locale** (que l'on ne peut généralement pas vérifier) permet de concevoir un procédé de traitement du signal qui consiste à estimer au préalable la fonction de corrélation de l'ensemble des parasites perçus par le radar, pour ensuite bâtir un récepteur optimal pendant la période de temps où cette fonction de corrélation peut être considérée comme représentative. Cette méthode conduit aux traitements adaptatifs qui sont décrits ci – après.

### 4.1 SUPPRESSION ADAPTATIVE DU BRUIT COLORE

#### 4.1.1 Principe de base

Supposons possible l'existence d'un capteur auxiliaire sensible aux parasites extérieurs (brouilleurs, réverbération, échos de nuages, sol...) sources de bruits colorés, et peu sensible à l'écho utile de manière à ce que seule une faible puissance du signal recherché soit présente dans cette voie.

Il paraît alors possible d'opérer une soustraction des bruits colorés selon le schéma suivant :



Ce schéma est très proche de celui défini au paragraphe 3.3 (méthode soustractive), avec cependant quelques différences notables :

- le signal, dans la mesure où il est peu présent dans la voie auxiliaire, n'est pas affecté par le traitement ; il faudra donc en tenir compte en normalisant par l'unité (référence d'énergie unitaire) ;
- le filtre  $U_0$  dont le rôle reste de fournir la meilleure estimation de la partie colorée du bruit, dispose d'une information plus riche que dans le cas précédent du fait de l'existence d'une voie de référence séparée du bruit à éliminer.

A la limite, si seul ce bruit coloré est présent dans les deux voies, à une déformation constante près telle que :

$$N_z(t) = \Gamma \cdot N_x(t)$$

il suffirait de calculer la fonction d'intercorrélation entre les variables z et x :

$$E[Z(t) \cdot X^*(t)] = \Gamma \cdot E[|N_x(t)|^2]$$

et la fonction d'autocorrélation du bruit de la voie auxiliaire :

$$E[|X(t)|^2] = E[|N_x(t)|^2]$$

et d'écrire :

$$U_0 = \Gamma = \frac{E[Z(t) \cdot X^*(t)]}{E[|X(t)|^2]}$$

pour obtenir une estimation exacte du coefficient  $\Gamma$  et par le fait une suppression totale du bruit coloré.

L'exploitation d'une voie auxiliaire est donc, dans ce cas optimal plus riche que la méthode soustractive avec filtre correcteur, par le fait que l'on dispose d'une référence de bruit indépendante de la voie principale.

En pratique un tel procédé se heurte cependant à plusieurs limitations :

- les bruits colorés peuvent différer légèrement d'une voie à l'autre ;
- ils sont accompagnés de bruits blancs, indépendants dans chaque voie ;
- le résidu de signal présent dans la voie auxiliaire vient fausser l'estimation.

Il faudra toujours garder à l'esprit ces considérations pratiques dans l'étude des procédés qui vont suivre, pour mieux en saisir les spécificités et les limitations.

Par ailleurs, on s'apercevra qu'il y a une réelle difficulté à disposer de cette «référence bruit seul » pour les parasites liés à l'émission du radar, soit les échos parasites par opposition aux bruits parasites, ce qui conduira à la recherche de structures « sans référence de bruit seul ».

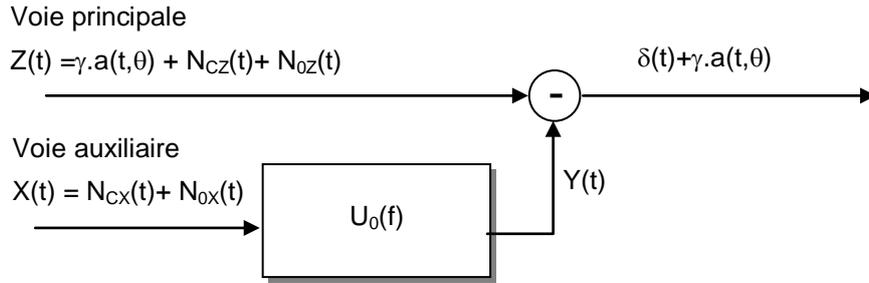
#### 4.1.2 Recherche de la meilleure estimation

Le problème posé est celui de la meilleure estimation possible de  $N_c(t)$  en présence d'une référence non pure, notamment en présence de bruits blancs, indépendants sur les deux voies principale et auxiliaire.

Plaçons - nous dans le cas de processus stationnaires et considérons le bruit  $\delta(t)$  différence entre le bruit issu de la voie principale et le bruit issu de la voie auxiliaire après traitement par le filtre  $U_0(f)$ .

En reprenant le critère du paragraphe 3.3 d'estimation par minimisation de la variance de l'erreur on recherchera :

$$E[\delta(t) \cdot \delta^*(t)] = E[|\delta(t)|^2] \Rightarrow \text{minimum}$$



$$E[\delta(t) \cdot \delta^*(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int |N_Z(t) - Y(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int |H_Z(f) - H_Y(f)|^2 df$$

$$E[\delta(t) \cdot \delta^*(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int [ |H_Z(f)|^2 + |H_Y(f)|^2 - H_Z(f) \cdot H_Y^*(f) - H_Z^*(f) \cdot H_Y(f) ] \cdot df$$

On connaît par ailleurs l'équation de filtrage :

$$H_Y(f) = H_X(f) \cdot U_0(f)$$

et on peut écrire, densités spectrales et inter-spectrales :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|H_X(f)|^2}{T} = \phi_X(f) = S_{XX}(f)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|H_Z(f)|^2}{T} = \phi_Z(f) = S_{ZZ}(f)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{H_Z(f) \cdot H_X^*(f)}{T} = S_{ZX}(f)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{H_Z^*(f) \cdot H_X(f)}{T} = S_{XZ}(f) = S_{ZX}^*(f)$$

Il convient de rechercher les conditions pour que :

$$E[\delta(t) \cdot \delta^*(t)] = \int [ S_{ZZ}(f) + |U_0(f)|^2 S_{XX}(f) - U_0^*(f) \cdot S_{ZX}(f) - U_0(f) \cdot S_{XZ}^*(f) ] \cdot df$$

soit minimale pour tout  $f$  à  $U_0$  donné. La méthode d'annulation du gradient, développée en annexe 1, conduit alors au résultat :

$$\hat{U}_0(f) = \frac{S_{ZX}(f)}{S_{XX}(f)}$$

$U_0$  est ainsi estimé en amplitude et en phase par une relation qui généralise le cas particulier traité au paragraphe précédent et qui, au plan des amplitudes, est de même forme que celle rencontrée au paragraphe 3.3. En effet, en distinguant les parties blanches et colorées des bruits on peut écrire:

$$N_Z(t) = N_{CZ}(t) + N_{OZ}(t)$$

$$N_X(t) = N_{CX}(t) + N_{OX}(t)$$

$N_{CZ}(t)$  et  $N_{CX}(t)$  sont liés entre eux, mais par contre  $N_{OZ}(t)$ ,  $N_{OX}(t)$  et l'un quelconque des  $N_C$  sont indépendants entre eux.

Les propriétés des densités interspectrales permettent d'écrire, en introduisant le coefficient  $\Gamma(f)$  reliant les spectres du bruit coloré dans les voies Z et X :

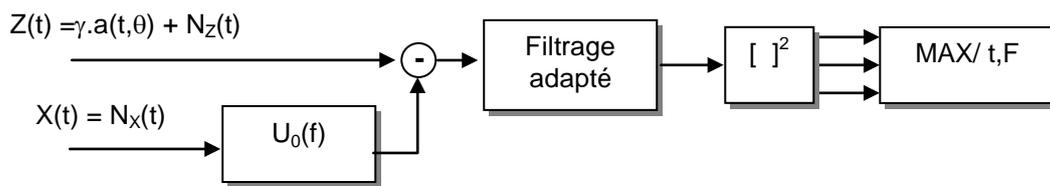
$$S_{ZX}(f) = S_{CZ,CX}(f) = \Gamma(f) \cdot S_{CX,CX}(f) = \Gamma(f) \cdot \phi_{CX}(f)$$

$$S_{XX}(f) = S_{CX,CX}(f) + S_{OX,OX}(f) = \phi_{CX}(f) + \phi_{OX}(f)$$

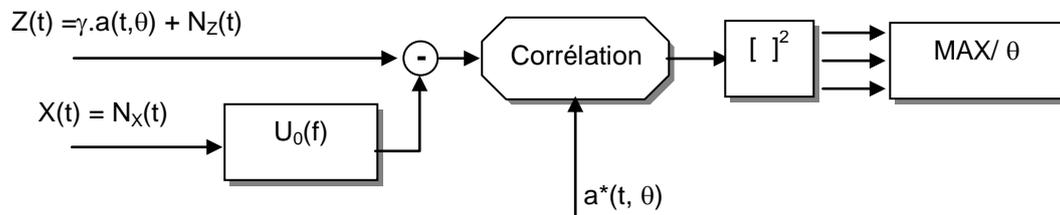
$$\hat{U}_0(f) = \Gamma(f) \frac{\phi_{CX}(f)}{\phi_{CX}(f) + \phi_{OX}(f)}$$

Le traitement optimal après suppression adaptative du bruit est le même qu'après la méthode soustractive du paragraphe 3.3 ou l'action d'un filtre superblanchissant.

Par contre, le signal n'est pas affecté par ce type de traitement, il n'y donc pas lieu de modifier sa normalisation. D'où les schémas du récepteur optimal.



Suppression adaptative plus filtre adapté



Suppression adaptative plus corrélation

#### 4.1.3 Limitation liée aux bruits blancs des deux voies

En absence des bruits blancs,  $U_0(f) = \Gamma(f)$  on parvient donc à l'estimation exacte du bruit coloré et de ce fait à son annulation.

La présence des deux bruits blancs, indépendants dans les voies principale et auxiliaire, est un des facteurs venant limiter les performances de ce procédé.

Le spectre d'un échantillon de bruit dans la voie principale a pour expression :

$$H_Z(f) = \Gamma(f) \cdot H_{CX}(f) + H_{OZ}(f)$$

Le spectre de l'échantillon correspondant dans la voie de référence, après filtrage par l'estimation de  $U_0$ , s'écrit également :

$$H_Y(f) = H_X(f) \cdot \hat{U}_0(f)$$

D'où le spectre du signal d'erreur :

$$H_\delta(f) = H_Z(f) - H_Y(f)$$

Le calcul développé en annexe 2 conduit à définir la densité spectrale du bruit porté par le signal d'erreur, tous les bruits blancs étant de densité spectrale  $b_0$  :

$$\phi_{\delta}(f) = |\Gamma(f)|^2 \frac{b_0 \cdot \phi_{CX}}{\phi_{CX} + b_0} + b_0$$

Soit dans les cas pratiques où :  $\phi_{XC} \gg b_0$  et où  $\Gamma(f) \sim \Gamma = \text{Cte}$  :

$$\phi_{\delta}(f) \approx b_0 \cdot (1 + \Gamma^2)$$

et en intégrant dans la bande du récepteur :

$$B_{\delta}(f) \approx B_0 \cdot (1 + \Gamma^2)$$

Dans les mêmes conditions, le bruit dans la voie principale avant correction a pour puissance :

$$B_z = \Gamma^2 B_{CX} + B_0$$

d'où le facteur d'amélioration apporté par le traitement :

$$FA = \frac{\Gamma^2 \frac{B_{CX}}{B_0} + 1}{\Gamma^2 + 1}$$

Soit en remarquant que :

$$\Gamma^2 = \frac{B_{CZ}}{B_{CX}}$$

$$FA = \frac{\frac{B_{CZ}}{B_0} + 1}{\frac{B_{CZ}}{B_{CX}} + 1}$$

Le traitement ainsi pratiqué sera donc d'autant plus performant que le rapport bruit coloré/bruit blanc dans la voie principale sera grand et que le bruit coloré dans la voie auxiliaire « couvrira » au mieux le bruit coloré de la voie principale.

#### 4.1.4 Limitation liée à la présence de signal dans la voie auxiliaire

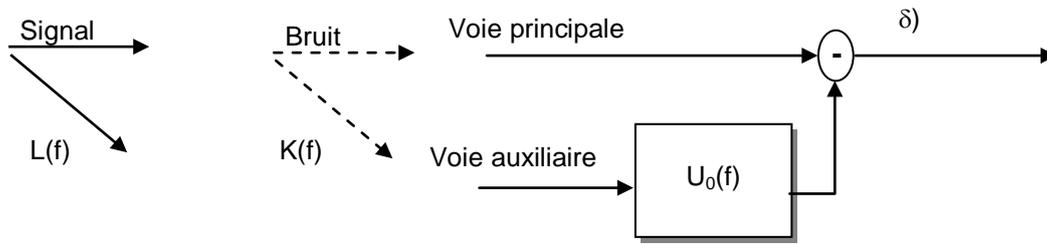
Plaçons - nous dans le cas où les bruits colorés sont largement supérieurs aux bruits blancs dans chaque voie, de telle sorte que l'on peut écrire à chaque instant :

$$H_x(f) = H_z(f) / \Gamma(f) = H_z(f) \cdot K(f)$$

Supposons par ailleurs qu'une part du signal soit présent sur la voie auxiliaire de telle manière que :

$$A_x(f) = A_z(f) \cdot L(f)$$

La présence de signal vient alors influencer sur l'estimateur de  $U_0(f)$  qui ne sait pas distinguer le signal du bruit. Le schéma de principe devient alors le suivant, en prenant comme base le signal et le bruit dans la voie principale :



Par définition l'estimateur de  $U_0$  s'écrit :

$$\hat{U}_0 = \frac{S_{zx}(f)}{S_{xx}(f)}$$

Et les spectres du signal et du bruit en sortie du dispositif :

$$A_{\delta}(f) = A_z(f) \cdot (1 - L(f))$$

$$H_{\delta}(f) = H_z(f) \cdot (1 - K(f))$$

Le calcul mené en annexe 3 conduit à définir un contraste entre les densités spectrales du signal et du bruit, en fonction des densités spectrales du signal  $\phi_A(f)$  et du bruit  $\phi_N(f)$  dans la voie signal :

Dans la voie différence  $\delta$  :

$$\rho_{\delta}(f) = \frac{\phi_N}{\phi_A} \left| \frac{K}{L} \right|^2$$

Dans la voie de référence  $X$  :

$$\rho_X(f) = \frac{\phi_A}{\phi_N} \left| \frac{L}{K} \right|^2$$

Ce qui conduit à poser :

$$\rho_{\delta}(f) = \rho_X(f)^{-1}$$

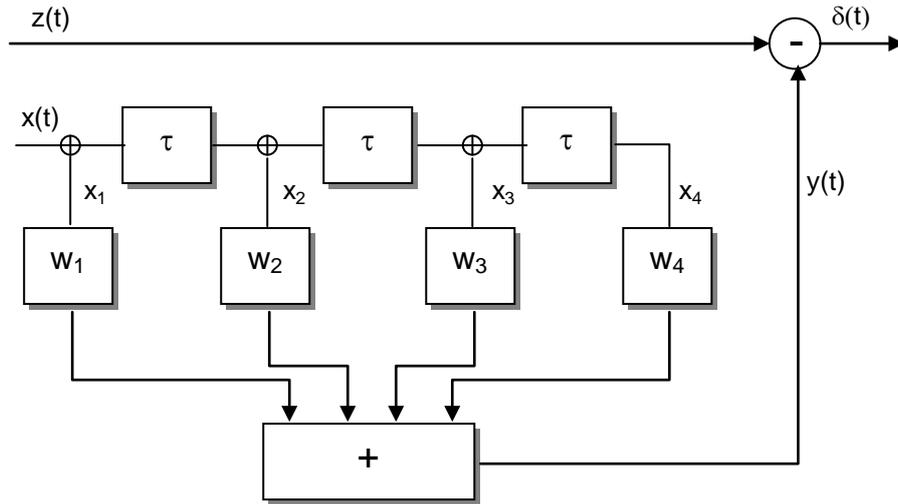
Le traitement ainsi pratiqué sera donc d'autant plus efficace que le contraste signal sur bruit dans la voie de référence sera faible.

## 4.2 SUPPRESSION ADAPTATIVE PAR FILTRE TRANSVERSAL

### 4.2.1 Principe de réalisation

En pratique, la réalisation du récepteur défini au paragraphe précédent a pour principale difficulté le calcul du filtre  $U_0(f)$  qui nécessite une estimation correcte des densités spectrales et interspectrales  $S_{xx}(f)$  et  $S_{zx}(f)$ .

Une réalisation possible est de concevoir ce récepteur sous la forme d'une boucle fermée ajustant en permanence les coefficients de filtrage en fonction des signaux reçus. Elle peut être organisée autour d'un filtre transversal, selon le schéma ci - après.



Le signal à la sortie du filtre s'écrit alors :

$$y(t) = \sum_1^n x(t - (i-1) \cdot \tau) \cdot w_i = \sum_1^n x_i \cdot w_i = W^T X(t)$$

si :  $W$  et  $X$  sont les vecteurs de composants  $w_i$  et  $x_i$  (notations matricielles).

Il convient alors d'ajuster les coefficients du filtre pour que la puissance portée par le signal différence  $\delta(t)$  soit minimale. Donc de rechercher la valeur du vecteur  $W$  telle que :

$$E[|\delta|^2] = E\left[|z(t) - W^T X(t)|^2\right] \Rightarrow \text{Minimale}$$

Ce qui est un critère des moindres carrés ou Least Mean Square (LMS).

Le calcul développé en annexe 4 conduit alors à l'expression :

$$W_{\text{opt}} = R_{XX}^{*-1} C_{zX}$$

$R_{XX} = E[XX^H]$ , est la matrice de covariance des échantillons de bruits pris sur la voie de référence de terme élémentaire :

$$r_{ij} = E\left[x_i \cdot x_j^*\right]$$

$C_{zX}$  est un vecteur de composantes :

$$c_i = E\left[z \cdot x_i^*\right]$$

#### 4.2.2 Calcul par récurrence. Boucle d'asservissement

Dans la mesure où les processus en cause sont stationnaires ou localement stationnaires, on peut calculer  $W$  de manière récursive. Pour cela, en désignant par  $W_{\text{opt}}$  la valeur à atteindre,  $X_k$  et  $Z_k$  les valeurs des variables à la récurrence  $k$ , on propose la formule de récurrence :

$$W_{k+1} = W_k + 2\mu \cdot E\left[\left(z_k - W_k^T X_k\right) \cdot X_k^*\right] = W_k + 2\mu \cdot E\left[\delta_k \cdot X_k^*\right]$$

en effet, à la récurrence  $k$  :

$$W_{\text{opt}} = R_{X_k X_k}^{*,-1} C_{z_k X_k} = R_{X_k X_k}^{*,-1} E(z_k X_k^*)$$

Donc :

$$E(z_k X_k^*) = R_{X_k X_k}^* W_{\text{opt}}$$

Le calcul développé en annexe 5 permet d'écrire par ailleurs :

$$E\left[\left(W_k^T X_k\right) \cdot X_k^*\right] = R_{X_k X_k}^* W_k$$

Ce qui revient à poser :

$$W_{k+1} = W_k + 2\mu \cdot R_{X_k X_k}^* (W_{\text{opt}} - W_k)$$

Cette relation qui entraîne :

$$W_{k+1} = W_k \quad \text{si} \quad W_k = W_{\text{opt}},$$

montre une convergence possible de  $W_{k+1}$  vers la valeur désirée. On montre (voir annexe 6) que cette convergence peut exister pour les valeurs de  $\mu$  définies par la relation :

$$0 \leq \mu \cdot \sum E\left[x_{i_k} x_{i_k}^*\right] \leq 1$$

On peut interpréter les résultats précédents de différentes manières,

**Forme 1**

$$\boxed{\begin{aligned} W_{k+1} &= W_k + 2\mu \cdot E\left[\delta_k \cdot X_k^*\right] \\ 0 \leq \mu &\leq \frac{1}{\sum E\left(x_{i_k} x_{i_k}^*\right)} \end{aligned}}$$

Dans ce cas, on doit calculer à chaque récurrence la moyenne de « n » produits de corrélation, mais la convergence peut être assez rapide. Elle dépend en réalité de la précision avec laquelle on peut estimer cette moyenne, et  $\mu$  devra être choisi d'autant plus faible que cette précision est médiocre.

**Forme 2**

A l'extrême, on pourra remplacer cette moyenne par la valeur du produit  $\delta_k \cdot X_k^*$  en un seul point, ou valeur instantanée. Cette évaluation très approximative de  $E[\delta_k \cdot X_k^*]$  conduira alors à choisir des valeurs de  $\mu$  très faibles, par exemple :

$$\mu \approx \frac{1}{100 \sum E\left(x_{i_k} x_{i_k}^*\right)}$$

ce qui conduira à des convergences très lentes.

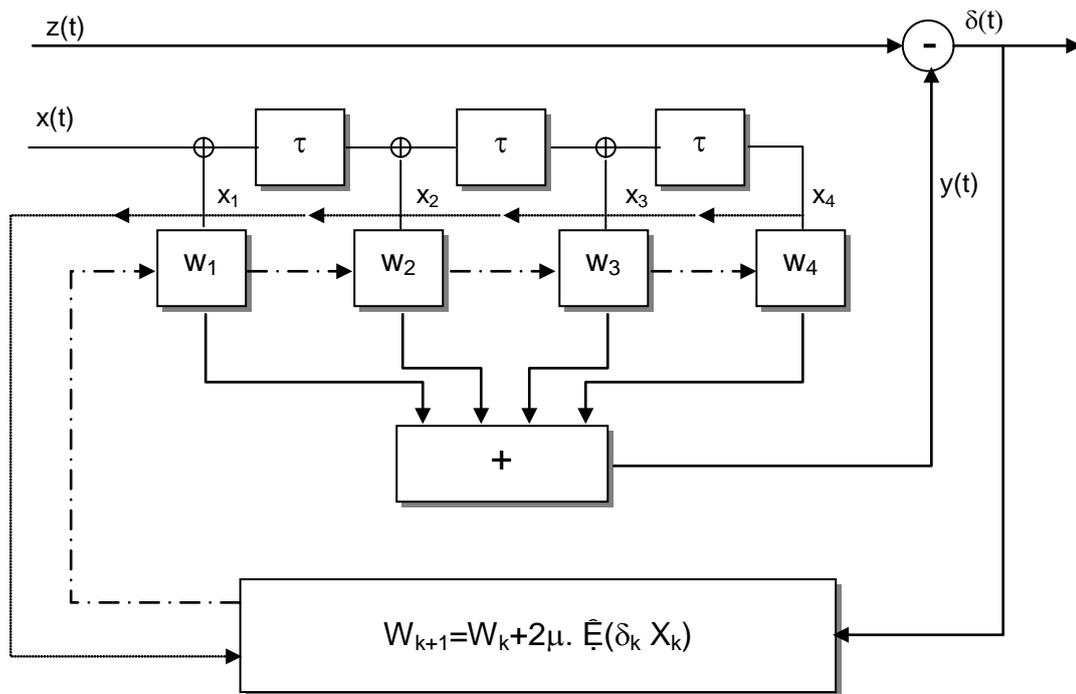
On écrira dans ce cas :

$$W_{k+1} = W_k + 2\mu \cdot \delta_k \cdot X_k^*$$

$$\mu \ll \ll \frac{1}{\sum \mathbb{E}(x_{i_k} x_{i_k}^*)}$$

Tous les cas intermédiaires étant possibles, on voit que l'on peut échanger de la puissance de calcul contre de la rapidité de convergence.

D'où le schéma de principe suivant d'un calcul par récurrence, où  $\hat{E}(\delta_k X_k)$  est la valeur estimée de la moyenne :



Suppression adaptative par filtre transversal

La résolution d'un tel filtre est :

$$\delta f = \frac{1}{(n-1) \cdot \tau}$$

Le choix de  $\tau$  dépend du parasite traité :

- dans le cas d'un filtrage doppler adaptatif par un radar périodique,  $\tau$  sera pris égal à la période de répétition du radar. Le filtre qui joue ici un rôle de régulateur pourra ou non être suivi d'un filtrage doppler classique,
- dans le cas de la suppression d'un brouilleur coloré,  $\tau$  devra au moins être égal à l'inverse du spectre du brouilleur à éliminer ou de la bande d'annulation choisie,
- à noter que pour un bruit blanc, un seul coefficient permet l'annulation, si les deux voies de réception sont par ailleurs identiques.

## 5 ANNEXES AU CHAPITRE 19-1

### 5.1 Annexe 1 (§ 4.1.1)

#### Suppression adaptative du bruit coloré : calcul de $U_0$

Il convient de rechercher la valeur de  $U_0(f)$  qui minimise pour tout  $f$  la fonction :

$$\Psi(U_0) = |U_0|^2 S_{xx} - U_0 S_{zx}^* - U_0^* S_{zx} + S_{zz}$$

Posons :

$$U_0 = X + jY$$

$$\Psi(X, Y) = (X^2 + Y^2) S_{xx} - (X + jY) \cdot S_{zx}^* - (X - jY) \cdot S_{zx} + S_{zz}$$

$$\frac{d\Psi}{dX} = 2XS_{xx} - S_{zx}^* - S_{zx} = 2XS_{xx} - 2\text{Réal}(S_{zx})$$

$$\frac{d\Psi}{dX} = 0 \Rightarrow \hat{X} = \frac{\text{Réal}(S_{zx})}{S_{xx}}$$

$$\frac{d\Psi}{dY} = 2YS_{xx} - jS_{zx}^* + jS_{zx} = 2YS_{xx} + 2\text{Im}(S_{zx})$$

$$\frac{d\Psi}{dY} = 0 \Rightarrow j\hat{Y} = \frac{\text{Im}(S_{zx})}{S_{xx}}$$

Ces deux dérivées partielles s'annulent simultanément si :

$$\hat{U}_0(f) = X + jY = \frac{S_{zx}(f)}{S_x(f)}$$

## 5.2 Annexe 2 (§ 4.1.3)

### Calcul de la densité spectrale du signal d'erreur

Le spectre d'un échantillon de bruit dans la voie principale a pour expression :

$$H_z(f) = \Gamma(f) \cdot H_{cx}(f) + H_{oz}(f)$$

Le spectre de l'échantillon correspondant de la voie de référence après filtrage par l'estimation de  $U_0$  s'écrit également :

$$H_Y(f) = H_X(f) \cdot \hat{U}_0(f) = (H_{cx}(f) + H_{ox}(f)) \cdot \left( \Gamma(f) \frac{\phi_{cx}(f)}{\phi_{cx}(f) + \phi_{ox}(f)} \right)$$

D'où le spectre du signal d'erreur :

$$H_\delta(f) = H_{oz}(f) + \Gamma(f) \cdot H_{cx}(f) \cdot \left( 1 - \frac{\phi_{cx}(f)}{\phi_{cx}(f) + \phi_{ox}(f)} \right) - \Gamma(f) \cdot H_{ox}(f) \cdot \frac{\phi_{cx}(f)}{\phi_{cx}(f) + \phi_{ox}(f)}$$

$$H_\delta(f) = H_{oz}(f) + \Gamma(f) \cdot H_{cx}(f) \cdot \frac{\phi_{ox}(f)}{\phi_{cx}(f) + \phi_{ox}(f)} - \Gamma(f) \cdot H_{ox}(f) \cdot \frac{\phi_{cx}(f)}{\phi_{cx}(f) + \phi_{ox}(f)}$$

et sa densité spectrale :

$$\phi_\delta(f) = \phi_{oz}(f) + |\Gamma(f)|^2 \cdot \phi_{cx}(f) \cdot \left( \frac{\phi_{ox}(f)}{\phi_{cx}(f) + \phi_{ox}(f)} \right)^2 + |\Gamma(f)|^2 \cdot \phi_{ox}(f) \cdot \left( \frac{\phi_{cx}(f)}{\phi_{cx}(f) + \phi_{ox}(f)} \right)^2$$

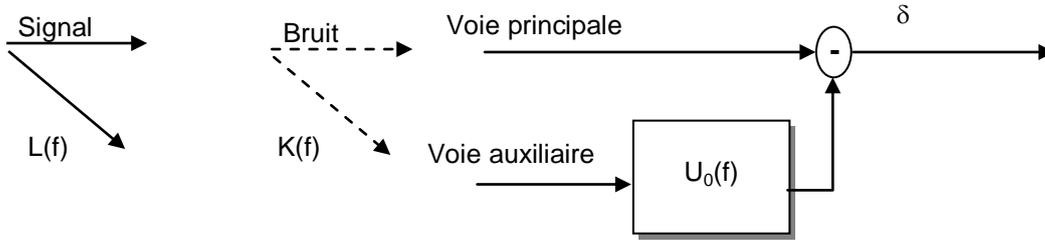
$$\phi_\delta(f) = b_0 + |\Gamma(f)|^2 \cdot \phi_{cx}(f) \cdot \left( \frac{b_0}{\phi_{cx}(f) + b_0} \right)^2 + |\Gamma(f)|^2 \cdot b_0 \cdot \left( \frac{\phi_{cx}(f)}{\phi_{cx}(f) + b_0} \right)^2$$

tous les bruits blancs étant de densité spectrale  $b_0$ .

Soit :

$$\boxed{\phi_\delta(f) = |\Gamma(f)|^2 \frac{b_0 \cdot \phi_{cx}}{\phi_{cx} + b_0} + b_0}$$

### 5.3 Annexe 3 (§ 4.1.4) Calcul de l'effet d'un résidu de signal dans la référence



Par définition l'estimateur de  $U_0$  s'écrit, en fonction des densités spectrales du signal  $\phi_A(f)$  et du bruit  $\phi_N(f)$  dans la voie signal :

$$\hat{U}_0 = \frac{S_{ZX}(f)}{S_{XX}(f)} = \frac{\phi_A(f) \cdot L^*(f) + \phi_N(f) \cdot K^*(f)}{\phi_A(f) \cdot |L(f)|^2 + \phi_N(f) |K(f)|^2}$$

Et les spectres du signal et du bruit en sortie du dispositif :

$$A_\delta(f) = A_Z(f) \cdot (1 - L(f))$$

$$H_\delta(f) = H_Z(f) \cdot (1 - K(f))$$

Les densités spectrales du bruit et du signal dans la voie  $\delta$  s'écrivent :

$$\phi_{A\delta}(f) = \phi_A(f) \cdot |1 - L(f) \cdot \hat{U}_0(f)|^2$$

$$\phi_{N\delta}(f) = \phi_N(f) \cdot |1 - K(f) \cdot \hat{U}_0(f)|^2$$

D'où le contraste densité spectrale signal sur densité spectrale bruit dans la voie  $\delta$  :

$$\rho_\delta(f) = \frac{\phi_A}{\phi_N} \frac{|\phi_A |L|^2 + \phi_N |K|^2 - \phi_A |L|^2 - \phi_N L \cdot K^*|^2}{|\phi_A |L|^2 + \phi_N |K|^2 - \phi_N k \cdot L^* - \phi_N |K|^2|^2}$$

$$\rho_\delta(f) = \frac{\phi_N}{\phi_A} \frac{|K^*(K-L)|^2}{|L^*(L-K)|^2} = \frac{\phi_N}{\phi_A} \frac{|K|^2}{|L|^2}$$

Par ailleurs dans la voie auxiliaire :

$$A_X(f) = A(f) \cdot L(f) \text{ et } H_{NX}(f) = H_Z(f) \cdot K(f)$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\rho_X(f) = \frac{\phi_A}{\phi_N} \frac{|L|^2}{|K|^2}$$

## 5.4 Annexe 4 (§ 4.2.1) Calcul du filtre transversal W

le but est de calculer les coefficients du filtre pour que la puissance portée par le signal différence :  $\delta(t)$  soit minimale, soit de rechercher la valeur du vecteur  $W$  telle que :

$$E\left[|\delta|^2\right] = E\left[\left|z(t) - W^T X(t)\right|^2\right] = E\left[\left(z(t) - W^T X(t)\right) \cdot \left(z^*(t) - W^H X^*(t)\right)\right] \Rightarrow \text{Minimale}$$

Nous allons mener ce calcul dans le cas d'un filtre à trois composantes pour lequel l'expression à minimiser s'écrit :

$$E\left[\left(z - w_1 x_1 - w_2 x_2 - w_3 x_3\right) \cdot \left(z^* - w_1^* x_1^* - w_2^* x_2^* - w_3^* x_3^*\right)\right]$$

Elle passe par un minimum lorsque ses dérivées par rapport aux trois composantes du vecteur  $W$  s'annulent simultanément. Considérons uniquement des termes contenant la composante  $w_1$ , l'expression à minimiser pour  $w_1$  s'écrit :

$$E\left[-z \cdot w_1^* x_1^* - z^* w_1 x_1 + w_1 w_1^* x_1 x_1^* + w_1 w_2^* x_1 x_2^* + w_1^* w_2 x_1^* x_2 + w_1 w_3^* x_1 x_3^* + w_1^* w_3 x_1^* x_3\right]$$

Ecrivons  $w_1 = a_1 + j b_1$  et retenons les termes contenant  $a_1$  il vient :

$$E\left[-a_1 z x_1^* - a_1 z^* x_1 + a_1^2 x_1 x_1^* + a_1 w_2^* x_1 x_2^* + a_1^* w_2 x_1^* x_2 + a_1 w_3^* x_1 x_3^* + a_1^* w_3 x_1^* x_3\right]$$

dont la dérivée par rapport à  $a_1$  s'écrit (2 Réel(A) = A + A\*) :

$$E\left[-2 \cdot \text{Réel}\left(z x_1^*\right) + 2 a_1 x_1 x_1^* + 2 \cdot \text{Réel}\left(w_2 x_2 x_1^*\right) + 2 \cdot \text{Réel}\left(w_3 x_3 x_1^*\right)\right]$$

De même écrivons les termes contenant  $b_1$  il vient :

$$E\left[+j b_1 z x_1^* - j b_1 z^* x_1 + b_1^2 x_1 x_1^* + j b_1 w_2^* x_1 x_2^* - j b_1^* w_2 x_1^* x_2 + j b_1 w_3^* x_1 x_3^* - j b_1^* w_3 x_1^* x_3\right]$$

dont la dérivée par rapport à  $b_1$  s'écrit (2 Im(A) = A - A\*) :

$$E\left[2j \cdot \text{Im}\left(z x_1^*\right) + 2 b_1 x_1 x_1^* - 2j \cdot \text{Im}\left(w_2 x_2 x_1^*\right) - 2j \cdot \text{Im}\left(w_3 x_3 x_1^*\right)\right]$$

L'annulation de ces deux dérivées conduit à poser simultanément :

$$a_1 E\left[x_1 x_1^*\right] = E\left[\text{Réel}\left(z x_1^*\right) - \text{Réel}\left(w_2 x_2 x_1^*\right) - \text{Réel}\left(w_3 x_3 x_1^*\right)\right]$$

$$j b_1 E\left[x_1 x_1^*\right] = E\left[j \cdot \text{Im}\left(z x_1^*\right) - j \cdot \text{Im}\left(w_2 x_2 x_1^*\right) - j \cdot \text{Im}\left(w_3 x_3 x_1^*\right)\right]$$

soit :

$$w_1 E\left[x_1 x_1^*\right] = E\left[z x_1^*\right] - w_2 E\left[x_2 x_1^*\right] - w_3 E\left[x_3 x_1^*\right]$$

ou encore, pour les trois composantes du vecteur  $W$  :

$$\begin{aligned} w_1 E[x_1 x_1^*] + w_2 E[x_2 x_1^*] + w_3 E[x_3 x_1^*] &= E[z x_1^*] \\ w_1 E[x_1 x_2^*] + w_2 E[x_2 x_2^*] + w_3 E[x_3 x_2^*] &= E[z x_2^*] \\ w_1 E[x_1 x_3^*] + w_2 E[x_2 x_3^*] + w_3 E[x_3 x_3^*] &= E[z x_3^*] \end{aligned}$$

Ce qui peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} E(x_1 x_1^*) & E(x_2 x_1^*) & E(x_3 x_1^*) \\ E(x_1 x_2^*) & E(x_2 x_2^*) & E(x_3 x_2^*) \\ E(x_1 x_3^*) & E(x_2 x_3^*) & E(x_3 x_3^*) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(z x_1^*) \\ E(z x_2^*) \\ E(z x_3^*) \end{bmatrix}$$

soit en définissant la matrice  $R_{XX}$  (ligne « i » ; colonne « j ») de terme  $r_{ij} = E(x_i x_j^*)$ , le vecteur  $W$  de terme  $w_j$ , et le vecteur  $C_{zX}$ , de terme  $c_i = E(z x_i^*)$  ;

$$c_i = \sum_j r_{ij}^* \cdot w_j \Rightarrow C_{zX} = R_{XX}^* W$$

ou encore

$$W_{opt} = R_{XX}^{*-1} C_{zX}$$

## 5.5 Annexe 5 (§ 4.2.2)

### Calcul du terme de récurrence (à 3 dimensions)

$$\begin{aligned} E\left[\left(W^T X\right) \cdot X^*\right] &= \begin{pmatrix} E\left[\left(w_1 x_1\right) + \left(w_2 x_2\right) + \left(w_3 x_3\right)\right] \cdot x_1^* \\ E\left[\left(w_1 x_1\right) + \left(w_2 x_2\right) + \left(w_3 x_3\right)\right] \cdot x_2^* \\ E\left[\left(w_1 x_1\right) + \left(w_2 x_2\right) + \left(w_3 x_3\right)\right] \cdot x_3^* \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} E\left(w_1 x_1 x_1^* + w_2 x_2 x_1^* + w_3 x_3 x_1^*\right) \\ E\left(w_1 x_1 x_2^* + w_2 x_2 x_2^* + w_3 x_3 x_2^*\right) \\ E\left(w_1 x_1 x_3^* + w_2 x_2 x_3^* + w_3 x_3 x_3^*\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E\left(x_1 x_1^*\right) & E\left(x_2 x_1^*\right) & E\left(x_3 x_1^*\right) \\ E\left(x_1 x_2^*\right) & E\left(x_2 x_2^*\right) & E\left(x_3 x_2^*\right) \\ E\left(x_1 x_3^*\right) & E\left(x_2 x_3^*\right) & E\left(x_3 x_3^*\right) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$E\left[\left(W^T X\right) \cdot X^*\right] = R_{XX}^* W$$

## 5.6 Annexe 6 (§ 4.2.2) Conditions de convergence

On pose  $\varepsilon_k = W_{\text{opt}} - W_k$ , écart entre la valeur du vecteur atteinte à la récurrence  $k$  et sa valeur optimale. L'expression :

$$W_{k+1} = W_k + 2\mu \cdot R_{XX}^* (W_{\text{opt}} - W_k)$$

peut alors s'écrire sous la forme (développement limité à trois termes):

$$\begin{pmatrix} W_{1,k+1} \\ W_{2,k+1} \\ W_{3,k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{1,k} \\ W_{2,k} \\ W_{3,k} \end{pmatrix} + 2\mu \cdot \begin{pmatrix} E(x_1 x_1^*) & E(x_2 x_1^*) & E(x_3 x_1^*) \\ E(x_1 x_2^*) & E(x_2 x_2^*) & E(x_3 x_2^*) \\ E(x_1 x_3^*) & E(x_2 x_3^*) & E(x_3 x_3^*) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

A la limite quand  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  et  $\varepsilon_3$ , tendent ensemble vers zéro, on peut les remplacer par un terme unique  $\varepsilon$  égal à leur moyenne de la sorte de se ramener aux équations :

$$\begin{aligned} W_{1,k+1} &= W_{1,k} + 2\mu\varepsilon_k \cdot \left( E_k[x_1 x_1^*] + E_k[x_2 x_1^*] + E_k[x_3 x_1^*] \right) \\ W_{2,k+1} &= W_{2,k} + 2\mu\varepsilon_k \cdot \left( E_k[x_1 x_2^*] + E_k[x_2 x_2^*] + E_k[x_3 x_2^*] \right) \\ W_{3,k+1} &= W_{3,k} + 2\mu\varepsilon_k \cdot \left( E_k[x_1 x_3^*] + E_k[x_2 x_3^*] + E_k[x_3 x_3^*] \right) \end{aligned}$$

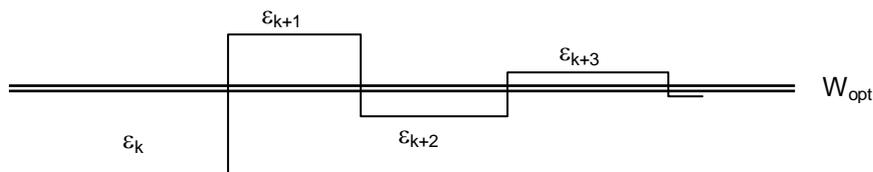
intuitivement on voit que le terme correctif pour les trois équations reste inférieur à une valeur unique faisant intervenir la trace de la matrice  $R_{XX}$  :

$$\begin{aligned} \Delta &= 2\mu|\varepsilon_k| \cdot \left[ E(x_1 x_1^*) + E(x_2 x_2^*) + E(x_3 x_3^*) \right] \\ \Delta &= 2\mu|\varepsilon_k| \cdot T_r(R_{XX}) \end{aligned}$$

Ce qui permet d'écrire plus simplement :

$$W_{k+1} = W_k + \Delta$$

Le schéma ci - après montre qu'il suffit alors que :  $0 \leq \Delta \leq 2\mu|\varepsilon_k|$  , pour que le système soit convergent.



On retiendra donc en définitive :

$$0 \leq \mu \leq \frac{1}{T_r(R_{XX})}$$